EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

31e JAARGANG 1955/56

I

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (*f* 12,50) zijn ingetekend, betalen *f* 6,75.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan hogere burgerscholen en lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep Liwenagel te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van Wimecos storten hun contributie, die met ingang van 1 September 1953 gewijzigd is in *f* 6,— per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam (hierin zijn de abonnementskosten op Euclides begrepen). De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 806593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 10,— per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107III, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Oranje Nassauplein 15, Zeist. Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

INHOUD:

DE PROJECTIE-METHODE VAN MONGE TOEGEPAST BIJ DE STEREOMETRIE

We geven in dit artikel de oplossing van enige vraagstukken, die op de eindexamens H.B.S. of Gymnasium in de laatste jaren zijn opgegeven. Het tekenen van stereometrische figuren daarbij is in vele gevallen moeilijk, soms zelfs ondoenlijk, ook al is men een geoefend tekenaar en past men de eenvoudigste wiskundige projectiemethode toe, nl. de klinografische.

Met de gewone beschrijvende meetkunde, verkort aangeduid als de Monge-projectie, zijn de figuren, die men bij de oplossing nodig heeft, hoe samengesteld ook, duidelijk en volledig te tekenen; zelfs de uitkomsten na te meten.

We geven enige voorbeelden; de lezers van Euclides, waarvan het merendeel de oplossingen van de leerlingen heeft nagezien, herkennen de vraagstukken op het eerste gezicht.

I. Eindexamen H.B.S. 1950 nr 1.

T *is de top van een pyramide, die de rechthoek* ABCD *tot grondvlak heeft. De projectie van* T *op het grondvlak valt samen met het midden* M *van* CD. $AB = 2p$; $AD = p$; $TM = p\sqrt{3}$.

a. Maak een duidelijke figuur en teken daarin nauwkeurig de lijn PQ, *die de rechten* AT *en* BC *loodrecht snijdt* (P *op* AT *en* Q *op* BC).

b. Druk de lengte van het lijnstuk PQ *in* p *uit.*

c. Teken de doorsnede van de pyramide met het vlak, dat de tweevlakshoek, gevormd door de vlakken ABT *en* ABCD, *middendoor deelt. Noem het snijpunt van* TM *met dit deelvlak* S. *Bewijs, dat* S *het zwaartepunt is van* $\triangle$ CDT.

d. Teken de lijn, die door B *gaat en de kruisende lijnen* PQ *en* TM *snijdt. Noem het punt, waarin de gevonden lijn* PQ *snijdt,* R.

e. Bewijs, dat $BR = RS$ *is.*

Voor de figuur in klinografische projectie zie men fig. 10 op blz. 60 van jg. 29, 1953/54; duidelijk en goed, alleszins voldoende. We geven hier toch ook nog de Monge-projectie, om te laten zien, hoe eenvoudig deze oplossing is.

Zie op fig. 1. ABCD op V_1 en de gelijkzijdige driehoek CDT met de hoogtelijn TM; op V_1 nog AT′ en BT′.

a. De loodlijn PQ moet rechte hoeken maken met AT en BC, dus met AT en AD; hij staat dus loodrecht op het vlak α van deze lijnen; P'Q $\perp$ α_1 en P''Q'' $\perp$ α_2. Trek dus Q''P'' $\perp$ TD; dat is een hoogtelijn in de gelijkzijdige driehoek TCD; P'Q evenwijdig aan de as door P', het midden van AT'.

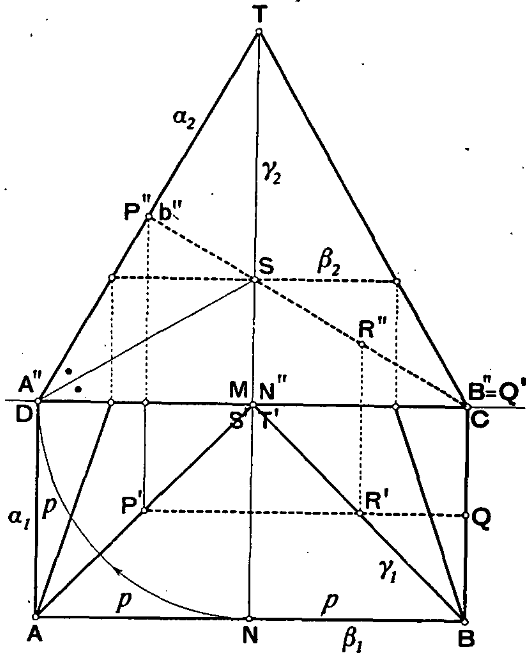


Fig. 1

b. PQ is de hoogtelijn in de gelijkzijdige driehoek TCD, dus $p\sqrt{3}$.

c. $\angle$ TNM is de standhoek van de vlakken ABT en ABCD; deze wordt een kwartslag om TM in V_2 gedraaid; zie het kwadrant met de pijl. De deellijn van $\angle$ TDM snijdt TM in S, het hoogtepunt van de gelijkzijdige driehoek; de doorgang β_2 van het deelvlak met V_2 loopt dus door S evenwijdig met de as; AB is β_1.

d. De lijn door B, die TM snijdt, ligt in hun vlak γ; γ_1 snijdt P'Q in R'; omdat P' het midden is van AT' en Q dat van BC, is R' het midden van BS', dus is BR = RS, wat in *e* wordt gevraagd te bewijzen.

De oplossing met een figuur in klinografische projectie is eenvoudig; deze figuur in Monge-projectie zeker niet minder.

II. Eindexamen H.B.S. 1953 nr 3.

Van een vierzijdige pyramide T—ABCD *is het grondvlak een vierkant, waarvan de zijde p cm is. De opstaande ribbe* AT *staat loodrecht*

op het grondvlak en is eveneens p cm. Door A *brengt men het vlak* V *aan loodrecht op* CT, *dat* BT, CT *en* DT *opvolgend snijdt in de punten* E, F *en* G.

a. Teken deze doorsnede.

b. Bewijs, dat hoek AEF *recht is.*

c. Bewijs, dat om elk der delen, waarin de pyramide door V *verdeeld wordt, een bol beschreven kan worden.*

d. Construeer de middelpunten van de beide bollen en druk de stralen in p uit.

In de opgave van het eindexamen stond onder *a*: „in een stereometrische figuur", onder *d*: „in de stereometrische figuur". Zie daarvoor de klinografische projectie van fig. 17, blz. 62 jg. 1953/54; deze laat aan duidelijkheid niets te wensen over; het maken van de tekening gaat eenvoudig en vlug. Zelfs het beschrijven van de bollen gaat gemakkelijk, want de grote cirkel evenwijdig aan het tafereel projecteert zich als een cirkel. Uitgesloten is de mogelijkheid daarvan in scheve projectie.

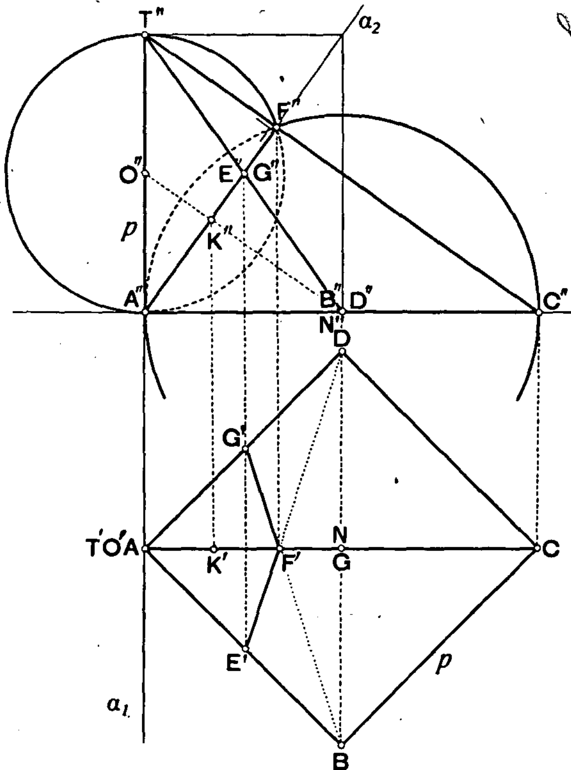


Fig. 2

We gaan nu over tot de uitwerking in M o n g e-projectie. Zie fig. 2;

het vierkant ABCD en de opstaande ribben TA, TB, TC en TD.

a. Het vlak α door A loodrecht op TC; dus $\alpha_1 \perp$ T'C en $\alpha_2 \perp$ T''C'' zie verder E'' = G'', F'' en F'.

b. $\angle$ AEF recht, zegt de opgave; wel: FC $\perp$ α, dus FC $\perp$ AE; verder AE $\perp$ BC, dus is AE $\perp$ vlak van FC en BC; in dit vlak ligt EF; dus is AE $\perp$ EF.

c, *d*. Vierhoek AEFG is een vlieger, waarvan $\angle$ E en $\angle$ G 90° zijn; het midden K van AF heeft dus gelijke afstanden tot A, E, F en G; in $\triangle$ A''T''F'' is O'' het midden van de schuine zijde, dus is O het middelpunt van de bol door F en de vier genoemde punten; straal $\frac{1}{2}p$.

O''K'' is middenparallel in $\triangle$ A''T''F''; het verlengde van O''K'' komt dus in B'' terecht; O'K' ziet men in het horizontale vlak. OK snijdt dit vlak in N; N is het middelpunt van de bol om het onderste veelvlak; straal AN = $\frac{1}{2}p\sqrt{2}$.

Deze oplossing is zeker zo gemakkelijk als die in klinografische projectie.

III. De beide vorige werkstukken hebben we uitgevoerd in klinografische projectie en in Monge-projectie. Maar daarmee zijn we nog niet klaar; er zijn heel wat vraagstukken, waarbij men ook een bol heeft. Opzettelijk kiezen we vraagstukken van de eindexamens, waarin bollen voorkomen.

Eindexamen H.B.S. 1950 nr 2.

De gelijkzijdige driehoek ABC *met zijde p is het grondvlak van een afgeknot prisma, waarvan de opstaande ribben* AD, BE *en* CF *loodrecht op het grondvlak staan*; BE = CF *en* AD > BE.

Dit prisma heeft een ingeschreven bol met middelpunt M. *Druk de straal van die bol uit in p. Het vlak* DEF *maakt met het grondvlak een hoek van* 30°. *Druk de inhoud van het afgeknotte prisma in p uit.*

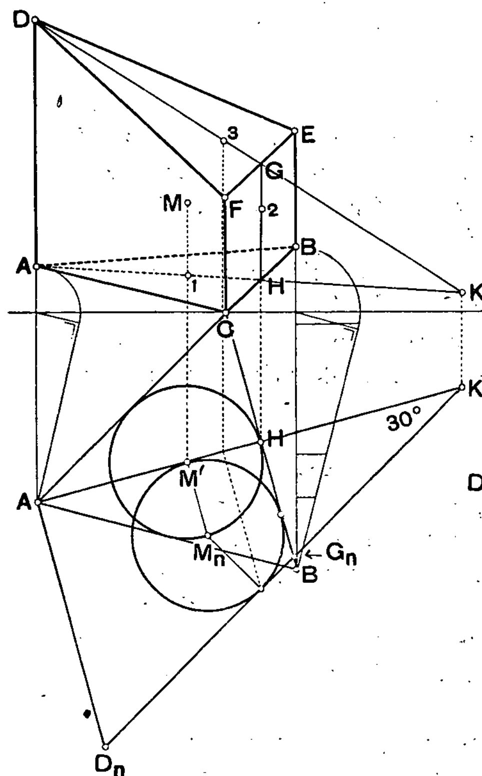
Zie fig. 3*a* voor de klinografische projectie. Voor de constructie is het nodig, dat men het vlak door de opstaande ribbe AD, dat BC loodrecht middendoor deelt, neerslaat in het grondvlak; zie $\triangle AKD_n$

In dit neergeslagen vlak tekenen we de cirkel met middelpunt M_n met de drie raakpunten. Uitgesloten, dat een leerling er iets van terecht brengt in het tafereel. Denk toch vooral niet, dat de cirkel met middelpunt M en straal *r* op het tafereel door de punten 1, 2 en 3 gaat.

En al zou men met veel moeite in deze projectie nog iets bereiken, dan toch zou de neerslag in het grondvlak ons moeten dienen voor de berekeningen, onontbeerlijk vanwege die 30°; men maakt er een

gewoon planimetrisch vraagstuk van, als men zich beperkt tot wat op fig. 3*a* onder de as is getekend.

We kunnen ons best redden zonder het tafereel. Wat men onder de as ziet, is wegens zijn twee onderling loodrechte vlakken, nl. het vlak van $\triangle$ ABC en het vlak AKD, eén Monge-projectie! Dan kunnen we beter het kind bij de naam noemen en een normale figuur maken als fig. 3*b*. De projectie van Monge. Deze wint het, zeker bij dit vraagstuk, van alle andere methoden.



Eig. 3a

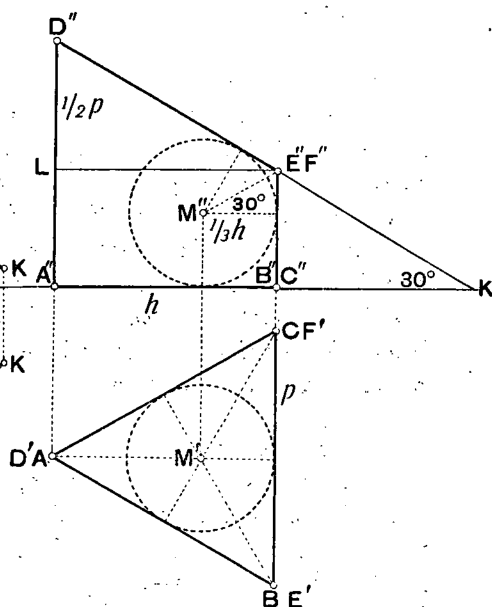


Fig. 3b

De straal van de bol is $\frac{1}{3}$ van de hoogtelijn van $\triangle$ ABC, dus $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}p\sqrt{3} = \frac{1}{6}p\sqrt{3}$.

Zie nu op het vertikale vlak; de straal van de aangeschreven cirkel aan de zijde B''E'' is $\frac{1}{3}h$ (h is de hoogtelijn van $\triangle$ ABC).

Trek E''L // as; $\triangle$E''LD'' $\cong$ met de halve driehoek op het grondvlak; dus is KD'' $= \frac{1}{2}p$.

$$A''L = B''E'' = \tfrac{1}{3}h + \tfrac{1}{3}h \operatorname{tg} 30^\circ = \tfrac{1}{3}h\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \tfrac{1}{6}p\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$\frac{1}{6}p(\sqrt{3} + 1)$; hieruit volgt: A''D'' $= \frac{1}{6}p(\sqrt{3} + 4)$.

Het derde deel van de som van de opstaande ribben is $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6}p(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 4) = \frac{1}{6}p(2 + \sqrt{3})$; de oppervlakte van het grondvlak is $\frac{1}{4}p^2\sqrt{3}$; de inhoud van het afgeknotte prisma is dus $\frac{1}{24}p^3(3 + 2\sqrt{3})$.

Een groot voordeel van de vlakke meetkunde is, dat men de uitkomsten kan nameten; bij de Monge-projectie geldt dit ook voor de stereometrie; bv. het derde deel van de som van AD, BE en CF is $\frac{1}{6}p(2 + \sqrt{3})$; $p = 33$ mm; dus komt er uit: $\frac{1}{6} \times 33 \times 3{,}73 = 20{,}5$ mm; op de figuur $\frac{1}{3}$ van $(31{,}5 + 2 \times 15) = 20{,}5$ mm. Kan het beter?

IV. Eindexamen H.B.S. 1949 nr 1.

Van een kubus met ribbe p is ABCD *het grondvlak; de opstaande ribben zijn* AE, BF, CG *en* DH. *Men beschouwt de bol, die door de punten* E, F *en* G *gaat en raakt aan het grondvlak* ABCD.

a. Druk de straal van die bol in p uit.

b. Een raaklijn in het hoekpunt F aan die bol snijdt het verlengde van DH *in* S. *Druk* HS *uit in p.*

c. De bol snijdt BF *behalve in* F *nog in een punt* P. *Het raakvlak in* P *aan de bol snijdt de kubus in twee delen. Bereken de verhouding van de inhouden van die delen.*

Ik zoek niet opzettelijk naar vraagstukken, waarbij men gemakkelijk een mooie figuur in klinografische projectie kan tekenen. Bij III zagen we reeds, dat de projectie-methode van Monge het wint van de klinografische projectie en dus zeker van de drie andere methoden: de centrale projectie, de perspectief en de scheve projectie; niet van de axonometrische, immers de klinografische projectie is een sterk vereenvoudigde, voor de school daardoor bruikbare axonometrie.

Bij het vraagstuk, hierboven afgedrukt, komt het voordeel van de projecties van Monge sterk uit. Er is sprake van een bol met een raaklijn en met een raakvlak.

In klinografische projectie, zie fig. 4*a*, beginnen we met het grondvlak; daarna zetten we de opstaande ribben uit en tekenen de verbindingslijn van de middelpunten van grondvlak en bovenvlak. Door een berekening (zie hieronder) bepalen we de plaats van M; maar dan! De raaklijn in F, het raakvlak in P; niet te doen in klinografische projectie, laat staan in scheve projectie, waarbij een bol wordt voorgesteld door een ellips. Dus afgestapt van fig. 4a en fig. 4*b* opgezet en daarmee de hele oplossing gemaakt in Monge-projectie, die ons bij geen enkel vraagstuk in de steek laat.

a. Fig. 4*b* is duidelijk, vooral met 4*a* erbij. Het middelpunt M van de bol ligt op de as PN van de kubus; zie op fig. 4*a* $\triangle$ MFN : $r^2 = (\frac{1}{2}p\sqrt{2})^2 + (p - r)^2$, waaruit $r = \frac{3}{4}p$; meet maar na op fig. 4*b*; M″G″ $= \frac{1}{4}p$.

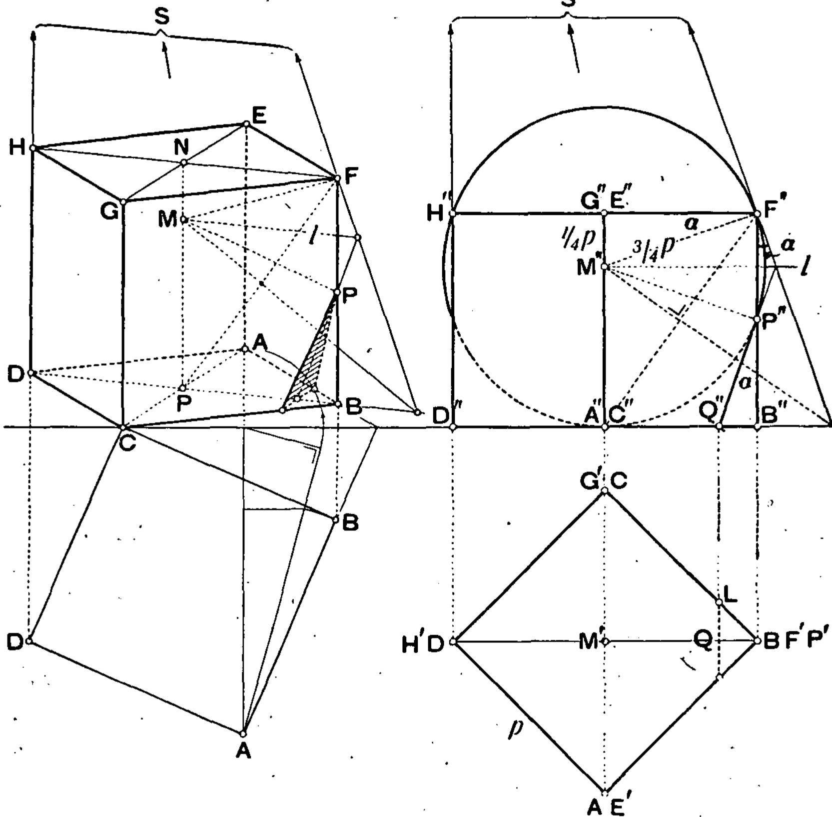


Fig. 4a Fig. 4b

b. Zie $\triangle$ F″M″E″; F″M″ $= \frac{3}{4}p$ en M″E″ $= \frac{1}{4}p$, dus is $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ en $\operatorname{cotg}\alpha = 2\sqrt{2}$; dit volgt uit E″F″ $= \frac{1}{2}p\sqrt{2}$ en M″E″ $= \frac{1}{4}p$.

H″S = F″H″ $\operatorname{cotg}\alpha = p\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4p$.

c. Trek $l \,//\,$ H″F″ en trek M″P″; nu is F″P″ = 2 × G″M″ = $2 \times \frac{1}{4}p = \frac{1}{2}p$; dus ook B″P″ $= \frac{1}{2}p$.

De raaklijn in P″ is het spiegelbeeld in l van de raaklijn in F″; zie de hoeken α; B″Q″ $= \frac{1}{2}p \operatorname{tg}\alpha$ en BL $= \frac{1}{2}p \operatorname{tg}\alpha . \sqrt{2} = \frac{1}{4}p$; meet maar na!

Die kleine pyramide met P als top heeft een inhoud, die zich verhoudt tot die van de kubus als $\frac{1}{4}p \cdot \frac{1}{4}p \cdot \frac{1}{2}p : 6 \times p \times p \times p = 1 : 192$.

En pas, nadat deze oplossing af was, is op fig. 4*a* de raaklijn in F geconstrueerd en ook het driehoekige vlakje, waarvan P de top is; de gegevens daarvoor zijn bepaald met de Monge-projectie. Het is eigenlijk geheel onnodig op 4*a*; fig. 4*b* geeft de hele oplossing.

V. Eindexamen Gymnasium 1952 nr 3.

Van het viervlak TABC *is het grondvlak* ABC *een gelijkzijdige driehoek met zijde a. De standhoek op de ribbe* BC *is* 60°, *terwijl* TA *loodrecht op het grondvlak staat.* M *is een punt zodanig op* AT *gelegen, dat* AM $= \frac{1}{2}a$ *is.*

a. Bewijs, dat de bol (M, $\frac{1}{2}a$) *raakt aan het vlak* TBC *en geef de ligging van het raakpunt* S *aan.*

b. Welk deel van de oppervlakte van genoemde bol kan men van T *uit zien?*

c. Bepaal de lengte van CS.

d. Bereken de straal van de omgeschreven bol van het viervlak SABC.

De klinografische projectie van △ ABC, fig. 5*a*, kan men gemakkelijk tekenen. Het standvlak ADT op BC door AT moet men neerslaan in het grondvlak, teneinde die 60° te kunnen maken. We vinden dan de hoogte, die men na vermenigvuldiging met sin 75° (zie rechts) op het tafereel zet. Alles eenvoudig.

Maar zie, nu komt de moeilijkheid; uit M de loodlijn op TD; daarvoor moeten we de hulpconstructie in het neergeslagen vlak ADT_n uitvoeren; M_n op AT_n; $M_nS_n \perp DT_n$; S overbrengen op TD. Maar . . . nu werken we op het grondvlak en op een vlak door AD loodrecht op het grondvlak, samen een 1e en 2e projectie volgens Monge.

Ook lopen we vast met die bol; we zien niet, dat A erop ligt, niet, dat hij TD in S raakt; niet in deze eenvoudige klinografische projectie, waarbij men hem tenminste nog kan tekenen; veel minder in de scheve projectie, waarbij de projectie een ellips op toegevoegde middellijnen wordt.

En dan nog vraag *d* naar de omgeschreven bol van SABC; fig. 5*a* geeft al heel weinig voor de rest van het vraagstuk.

Daarom, waar men „Monge" toch niet kan ontberen, maar niet liever de hele oplossing in Monge-projectie gemaakt?

Wat wij reeds deden in het neergeslagen vlak T_nAD, dat komt nu op het vertikale vlak V_2, dat we evenwijdig namen met het symmetrievlak TAD; zie fig. 5*b*; met deze figuur maken wij de oplossing.

a. Op V_1 △ ABC met de hoogtelijn AD $= h =$ A″D″; de punten ophalen en de ophaallijn van A op V_2 doortrekken: zie B″, C″, A″,

T″; $\angle$ A″C″T″ = 60°. A″T″ = $h\sqrt{3} = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 1\frac{1}{2}a$; A″M″ = $\frac{1}{2}a$, dus M″T″ = a. $\triangle$ T″M″S″ $\cong$ $\triangle$ D″M″S″, dus is S″ het midden van T″C″; zie de vertikale projectie (M, $\frac{1}{2}a$) van de bol, die in A aan het grondvlak, in S aan TD raakt.

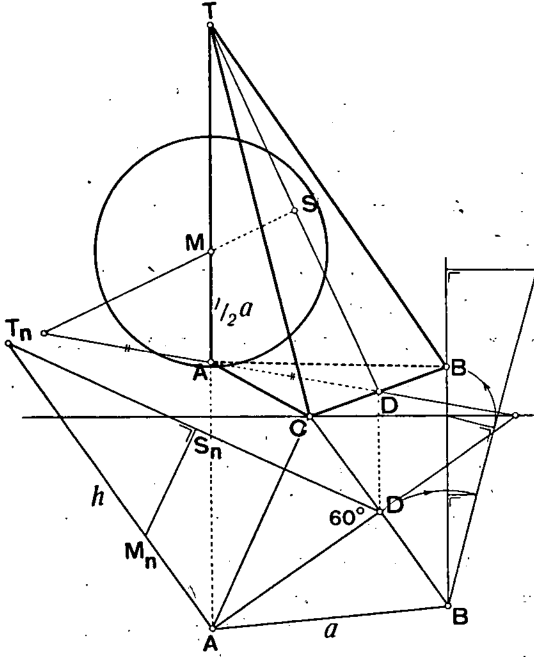


Fig. 5a

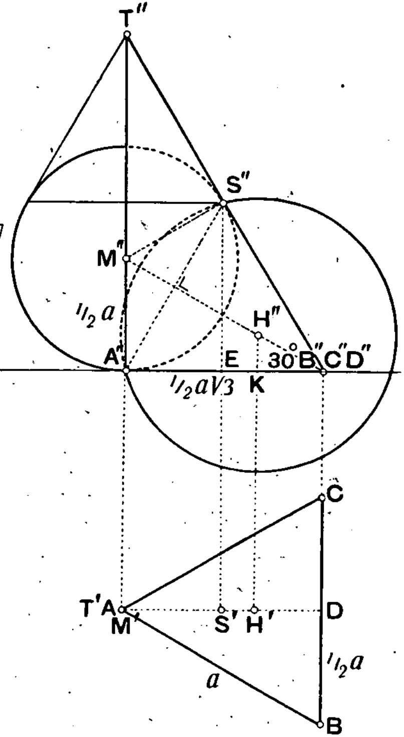


Fig. 5b

b. Uit T ziet men een bolsegment; de hoogte is de helft van M″S″, dus $\frac{1}{4}a$; de oppervlakte is $2\pi \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}\pi a^2$; de opp. van de hele bol is $4\pi \cdot \frac{1}{4}a^2 = \pi a^2$; uit T zien we dus $\frac{1}{4}$ van de oppervlakte.

c. $CS^2 = CD^2 + DS'^2 + ES''^2 = \frac{1}{4}a^2 + (\frac{1}{4}a\sqrt{3})^2 + (\frac{3}{4}a)^2 = a^2$; dus is CS = a.

d. De omgeschreven bol van SABC heeft een kleine cirkel door A, B en C; het middelpunt daarvan is het hoogtepunt H van $\triangle$ ABC; de loodlijn in H op het horizontale projectievlak snijdt D″M″ in H″; de straal van de bol is H″A″; $(H''A'')^2 = AH'^2 + H''K^2 = (\frac{2}{3}h)^2 + (\frac{1}{3}h \text{ tg } 30°)^2 = \frac{4}{9}h^2 + \frac{1}{9}h^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{13}{27}h^2 = \frac{13}{27} \cdot (\frac{1}{2}a\sqrt{3})^2 = \frac{13}{36}a^2$; dus is $r = \frac{1}{6}a\sqrt{13}$.

VI. Eindexamen H.B.S. 1954 nr 2.

Nr 1 van het examen 1954 luidt:

van een kubus is ABCD het grondvlak; AE, BF, CG en DH zijn de opstaande ribben; M is het midden van de ribbe BC.

a. Bereken sin ∠ (AM, DG);

b. evenzo de sinus van HM en het vlak BCG en

c. die van de vlakken AMG en ABC.

Hierbij kan men volstaan met een schets van de kubus; onnodig een bepaalde projectie-methode toe te passen.

nr 2 luidt aldus:

van een regelmatige vierzijdige pyramide T—ABCD *is de ribbe van het grondvlak gelijk aan* p, *terwijl* AT = AC *is.*

a. Bewijs, dat er een bol bestaat, die door T *en* C *gaat en aan het vlak* ADT *raakt; toon aan, dat* AC *raaklijn is aan deze bol.*

b. Bereken de straal van de cirkel, volgens welke de bol het grondvlak snijdt.

c. Bereken de straal van de bol.

Zie ABCD in het grondvlak, fig. 6*a*, en de projectie op het tafereel; hoe dat gaat, hoeven we hier niet meer uit te leggen. Maak de gelijkzijdige driehoek BD_nT; T_nT' is de hoogte; met de projectiedriehoek krijgen we de hoogte BF, die we boven G uitzetten.

De bol moet raken aan het vlak ADT; het heeft dus slechts één punt met de bol gemeen; de bol gaat door T; dus is T het raakpunt. Het middelpunt M ligt op de loodlijn l in T op het vlak ADT; ook in het asvlak van de ribbe TC; hun snijpunt M is hiermee bepaald.

Het bepalen van M in klinografische projectie is een heel werk (met andere methoden meer); als we het moesten doen, dan zou de behandeling toch steunen op allerlei, dat uitgevoerd wordt in het grondvlak; verder nog een bol en de kleine cirkel, volgens welke het grondvlak de bol snijdt. Alles is heel eenvoudig in Monge-projectie. We doen dus verder niets met fig. 6a en beginnen van voren af aan in Monge-projectie; zie fig. 6*b*.

Op V_1 het vierkant ABCD, op V_2 de gelijkzijdige driehoek A″C″T″ TA ligt in dat vlak; TA // V_2, dus is TA een 2de hoofdlijn van het vlak ADT; dus is de vertikale doorgang (op de figuur niet getekend) evenwijdig aan T″A″. Nu staat $l \perp$ vlak ADT, dus is $l' \perp$ AD en $l'' \perp$ A″T″.

a. Het asvlak van TC is het vlak α; zie α_2, die ∠ T″A″C″ middendoor deelt (op V_1 hoeven we niets te tekenen); l'' snijdt α_2 in M″, de vertikale projectie van het middelpunt M; de horizontale projectie is M′.

Nu nog bewijzen, dat AC raaklijn is aan de bol. AT is raaklijn, AC = AT, dus is C het raakpunt op de ribbe AC; de figuur wijst dit ook uit.

b. De straal van de cirkel, volgens welke de bol het grondvlak snijdt, is $C''B'' = \frac{1}{2}p\sqrt{2}$.

c. De straal van de bol verbindt M met een punt van de bol; voor dat punt nemen we C; zie de kwartcirkel, die C in B overbrengt; hierdoor wordt het vlak M′C evenwijdig aan V_2 gebracht. Nu is $M''B''$ de straal; $M''C'' = A''C''\ \mathrm{tg}\ 30° = p\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$; $C''B'' = \frac{1}{2}p\sqrt{2}$; dus is $R^2 = \frac{2}{3}p^2 + \frac{1}{2}p^2 = \frac{7}{6}p^2$ en $R = \frac{1}{6}p\sqrt{42}$.

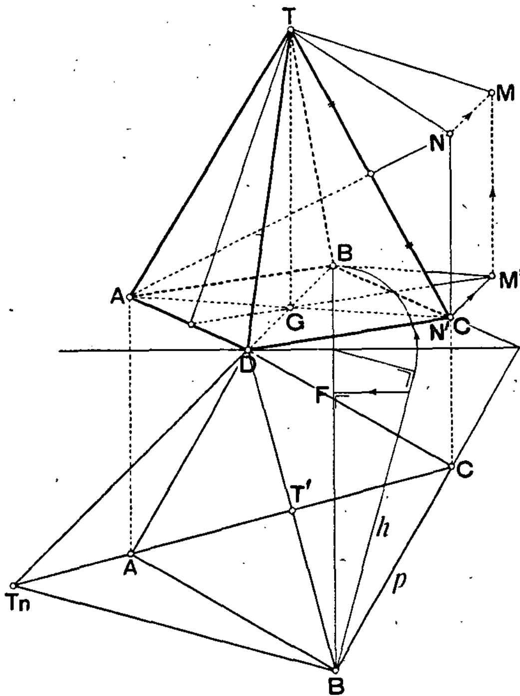


Fig. 6a

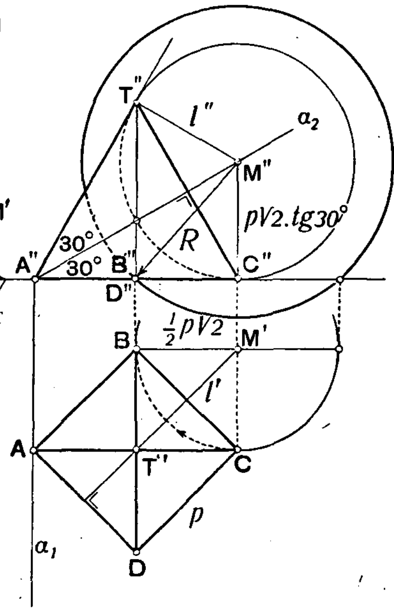


Fig. 6b

Zoals gezegd, hebben we de klinografische projectie niet afgemaakt wegens moeilijkheden, die zich voordeden. Voor elke andere projectiemethode (centrale projectie, perspectief, scheve projectie, axonometrie) gelden de bezwaren in veel sterkere mate. De bol aanbrengen, de snijcirkel met het grondvlak, bij geen van de 5 methoden komt er ook maar iets van terecht en het is volstrekt uitgesloten, dat men de hele uitwerking van 1949 nr 1 (fig. 4*a*) en van 1954 nr 2

(fig. 6*a*) kan eisen; zelfs niet in de klinografische projectie, laat staan in de scheve!

VII. Eindexamen H.B.S. 1955 nr 3.

Van het driezijdige prisma ABC—DEF *zijn de ribben van het grondvlak* ABC *alle* $2p$; $\angle$DAB = $\angle$ DAC = 60°. *In dit prisma kan een bol beschreven worden.*

a. Bewijs, dat AD *en* BC *elkaar loodrecht kruisen.*
b. Druk de afstand van AD *en* BC *uit in* p.
c. Ook de straal r *van de ingeschreven bol.*
d. En de lengte van de opstaande ribben.

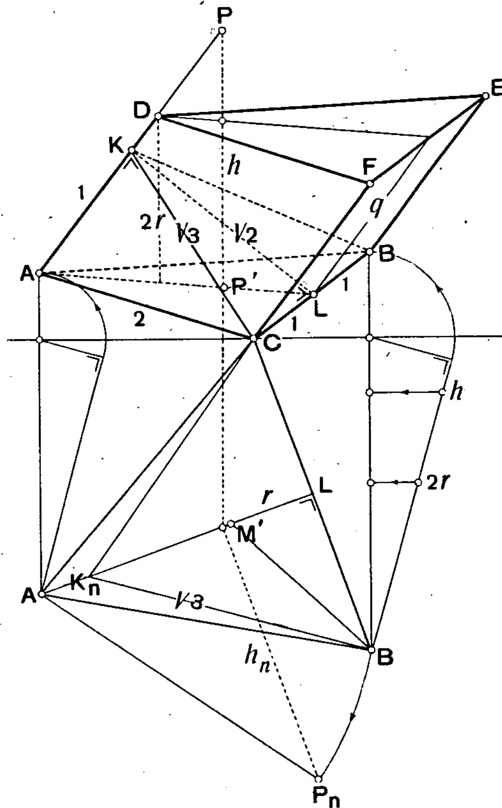


Fig. 7

Eerste oplossing. Zie fig. 7.

a. BC $\perp$ LK en BC $\perp$ LA, dus BC loodrecht op het vlak van LK en LA, dus op AK.

b. KL is de afstand van AD en BC; $\angle$ A = 60°, dus is AK = p; AL is de hoogtelijn in de gelijkzijdige driehoek ABC, dus $p\sqrt{3}$; KL = $\sqrt{3p^2 - p^2} = p\sqrt{2}$.

c. Er is een loodrechte doorsnede door het middelpunt van de bol; de grote cirkel in die doorsnede raakt aan de zijden van de driehoek, volgens welke de doorsnede het prisma snijdt. Die driehoek verschuiven we zo, dat de snijlijn met het zijvlak BCFE samenvalt met BC; zie $\triangle$ KBC. De straal van de ingeschreven cirkel is

$$r = O : s = 1 . \sqrt{2} : \sqrt{3} + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1) = \tfrac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2});$$

met p erbij: $\frac{1}{2}p(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. De constructie ziet men in het grondvlak zie $\triangle$ BCK_n; M is het middelpunt van de ingeschreven bol.

d. Zie in het tafereel; zet boven P′ de middellijn van de bol uit; we krijgen dan de hoogte van het prisma; waar we die nemen is om het even.

De hoogte $h = PP' = \sqrt{(2p)^2 - (\frac{2}{3}p\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{24}{9}p^2} = \frac{2}{3}p\sqrt{6}$.

$AD : AP = 2r : h$; dus $AD : 2p = p(\sqrt{6} - \sqrt{2}) : \frac{2}{3}p\sqrt{6}$; hieruit volgt $AD : p = (\sqrt{3} - 1) \times \sqrt{3} = (3 - \sqrt{3})$; dus is $AD = p(3 - \sqrt{3})$.

Tweede oplossing. Bij de eerste oplossing begon het zo: de bol raakt aan de drie opstaande vlakken van het prisma; enz. Even natuurlijk is het volgende: de bol raakt aan de drie zijden van de drievlakshoek, elk van 60°, waarvan A de top is; de meetkundige plaats is de hoogtelijn uit A op het overstaande zijvlak BCP van het regelmatige viervlak PBC. Ter bepaling van M nemen we het snijpunt van die lijn en het deelvlak van de standhoek op BC.

a en *b* zijn net hetzelfde als bij de eerste oplossing.

c. Zie verder fig. 7*b* (bij het lezen de accenten niet uitspreken).

G″ is het snijpunt van l'' en q''; de deellijn van $\angle$ A″L″G″ snijdt A″G″ in M″.

L″G″ is de helft van A″P″, want q'' // A″P″ en P″L″ wordt door l'' verdeeld in reden als 2 en 1; dus is $G''g = \frac{1}{2}h$. A″M″ : M″G″ = $\sqrt{3} : 1$, nl. als A″L″ en L″G″.

$h^2 = 2^2 - (\frac{2}{3}\sqrt{3})^2 = \frac{24}{9}$, dus is $h = \frac{2}{3}\sqrt{6}$ en $G''g = \frac{1}{2}h = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

$r : \frac{1}{2}h = A''M'' : A''G'' = \sqrt{3} : (\sqrt{3}+1)$, dus is $r = \dfrac{\frac{1}{3}\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

d. D″ vindt men, als men s'' // de as laat raken aan de cirkel. $A''D'' : 2r = A''P'' : h$; dat is:

$A''D'' : (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 2 : \frac{2}{3}\sqrt{6}$; hieruit vindt men $A''D'' = AD = 3 - \sqrt{3}$.

Ten overvloede hebben we van het prisma ook nog de beide projecties getekend.

Als men in de projectie van Monge tekent, kan men ook de proef

maken. Op fig. 7*b* is $2p = 50$ mm; de middellijn van de bol is dan $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \times 25$ mm en AD $= (3 - \sqrt{3}) \times 25$ mm.

$$\begin{array}{llcl} & \sqrt{6} = 2{,}45 & & 3 \\ & \sqrt{2} = 1{,}41 & & \sqrt{3} = 1{,}73 \\ \text{af} & \overline{\phantom{2r = 1{,}04}} & & \overline{\phantom{AD = 1{,}27}} \\ & 2r = 1{,}04 \times 25 \approx 26 \text{ mm} & & \text{AD} = 1{,}27 \times 25 \text{ mm} \approx 32 \text{ mm.} \end{array}$$

Meet ze maar na.

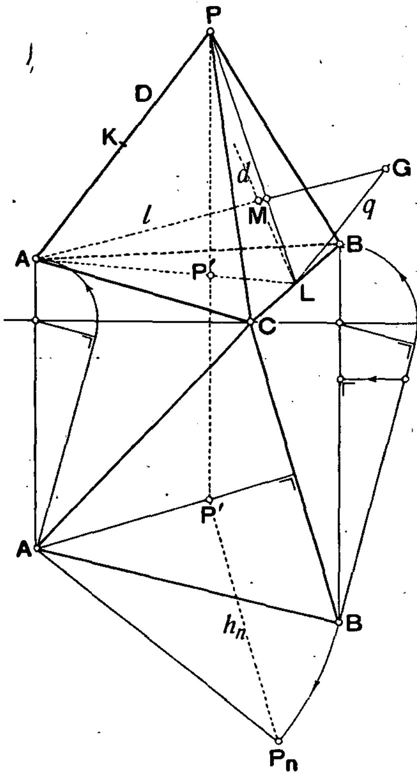


Fig. 7a

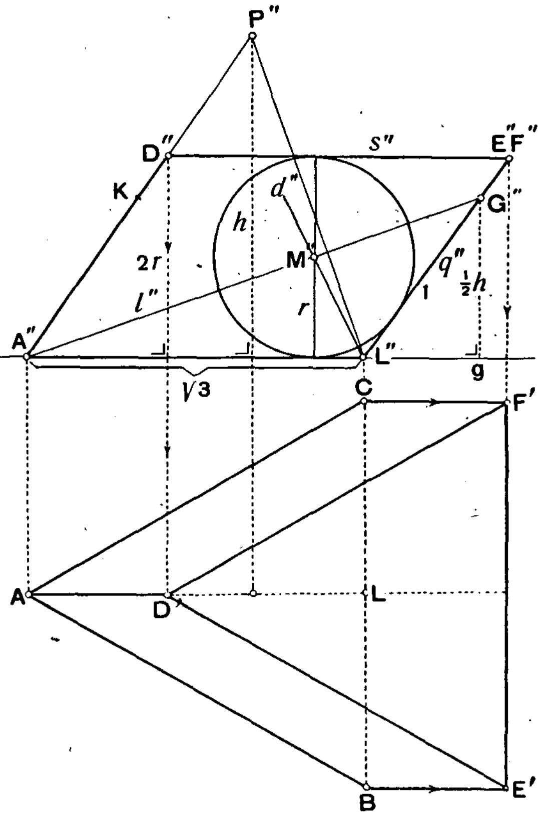


Fig. 7b

Aan het slot het volgende.

1) Bij stereometrie-vraagstukken over veelvlakken make men een figuur in klinografische projectie, b.v. zoals fig. 7 (De theorie is niet meer dan een halve bladzijde met 3 figuren.)

3) Komen er bollen, cylinders of kegels bij of zijn er andere moeilijkheden, b.v. raakvlakken, ga dan over op de Monge-projectie. Daarbij doet de gedeeltelijke figuur in klinografische projectie (de figuren *a*) dienst om zicht op de figuur te hebben. Berekeningen verlopen dan als in de vlakke meetkunde.

3) In alle gevallen zonder onderscheid is de Monge-projectie de beste, de meest zekere; deze laat ons niet in de steek. Van de klinografische projectie, dus nog veel minder van de centrale en de scheve projectie en de perspectief kan men dat niet zeggen.

4) De projectie-methode van de grootmeester Monge behouden bij het M.O.. Maar ontdoen van veel, dat er door tientallen jaren examineren bijgesleept is en waardoor het vak verworden is tot een caricatuur.

Zomer 1955. P. WIJDENES.

OVER HET ONTWERP VAN DE LEERPLANCOMMISSIE VAN WIMECOS

In het volgende worden enige bezwaren ontwikkeld tegen het ontwerp van de leerplancommissie, welke gevolgd worden door een voorstel.

Voorop sta, dat ik het leerplan met gematigd enthousiasme zou kunnen aanvaarden, indien we over een onbeperkt aantal uren konden beschikken (behoudens mijn bezwaar omtrent de leerstof van klas III); er zou dan tijd zijn om het ontbrekende aan te vullen.

Mijn voornaamste bezwaren zijn:

1. Het program geeft een verplicht minimum aan, maar stelt zoveel onderwerpen aan de orde, dat de tijd, om boven het minimum uit te gaan, ontbreekt.

2. Het program moet ook voor de onderbouw van een Lyceum dienen. Het is echter (vooral in klas III), wat de onderwerpen betreft, te veel geöriënteerd op de H.B.S.-B; de behandeling dier te zware onderwerpen is echter weer te oppervlakkig voor de H.B.S.-B.

3. Het program voor de onderbouw geeft te weinig waarborg voor een vruchtbare verwerking van het program van de bovenbouw.

4. Het program voor de bovenbouw is in het gegeven urental vrijwel onuitvoerbaar, alleen al, omdat de veelheid van onderwerpen een goede *verdeling* der uren onmogelijk maakt.

Ik werk deze bezwaren nader uit.

1. Men schat de overlading bij het huidige program wel eens op 25 %. Dit houdt in, dat het huidige program 31 uren zou eisen, i.p.v. 25 uren. Wil het nieuwe program *niet* aan overlading laboreren, dan moet het vrij wat minder tijdrovend zijn, dan het tegenwoordige; ietwat grof uitgedrukt: wat er afgaat, moet vrij wat meer zijn, dan wat er bijkomt. En gaat er werkelijk zoveel af? Schijnbaar wel, want alles wat enigszins in-gewikkeld is (en dus meestal ook tijdrovend), wordt geschrapt. Maar, waarde lezer, stelt U zich dit eens goed voor: U begint met $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; dan komt U met $c^2 - d^2$ aandragen; dan komt $4x^2 - 9y^2$ en hooguit nog $a^2 - 16$ aan de orde, en U bent klaar. Nu naar $a^2 + 2ab + b^2$. En zo maar door. In een paar lessen is het gebeurd. Maar dan? Zonder veel oefening beklijft dat allemaal niet. „Ze hebben het nu gehad"; maar het is nog niet het eigendom van de leerlingen geworden! U kunt weer beginnen,

wéér met $a^2 - b^2$ en wat daar verder volgt. En nog vele malen zult U de weggelaten ingewikkelde toepassingen moeten vervangen door een groot aantal rechtstreekse toepassingen. *Het moet toch allemaal zijn tijd hebben* om te kunnen bezinken. Vooral als men, zoals in klas III, zoveel onderwerpen in één jaar aan de orde stelt. Hier zal voortdurend herhalen noodzakelijk zijn, op véél grotere schaal, dan thans gebeurt. Men schijnt telkens weer uit te gaan van de gedachte, dat leerstof en kinderhersenen tot elkaar staan als voorwerpen tot een emmer. Men kan er tien koolrapen in stoppen, maar ook 40 uien. Dit is een vergissing. Tien leerstofeenheden van 4 weken per eenheid gaat misschien nog, maar 40 leerstofeenheden van 1 week per eenheid gaat niet. Men moet telkens weer op de oude leerstof terugkomen, en hoe meer onderwerpen men aan de orde stelt, hoe groter de verwarring in de hoofden dreigt te worden, hoe meer de leerlingen „het een met het ander dreigen te vergeten".

Beseft men wel voldoende, hoe weinig leerlingen in 5 jaar het diploma behalen? Hoeveel leerlingen zijn er niet, die klas 3 of (en) klas 4 doubleren? Bij het onderzoek van dr Bunt is hiermee geen rekening gehouden.

Beseft men wel voldoende, hoeveel leerlingen extra hulp krijgen, hetzij in de vorm van helpende familieleden, hetzij in de vorm van privaatles of huiswerkcursus? Als dat er eens allemaal niet was, dan was de toestand nog veel erger dan hij nu al is. Wee degenen, wier ouders niet de minste notie van wiskunde (en van frans, duits, engels, natuur- en scheikunde) hebben en geen bijles kunnen betalen en dus enkel af moeten hangen van wat ze op school opsteken in ons sneltreintempo (en dan zeven verschillende vakken op één dag). Zouden de resultaten van het onderzoek van dr Bunt niet nog véél te gunstig zijn?

2. Het ontwerp is een program voor de H.B.S.-B. Men kan zich dus op het standpunt stellen, dat het bestemd is voor leerlingen met behoorlijke aanleg voor wiskunde. Dit lijkt mij echter niet reëel. De B-afdeling begint toch pas na het derde leerjaar. Vanaf klas IV mag men dus zekere eisen aan de intelligentie van de leerlingen stellen. Maar het program voor de lagere klassen behoort zich naar de bredere schare te richten van hen, die niet naar de B-afd. gaan. Zelfs zou het verstandig zijn met het oog op de Lycea en de Gymnasia het program zo in te richten, dat het in de onderbouw voor al deze scholen bruikbaar is.

Tegenover de leraren, die nooit enige bezwaren ondervonden hebben bij de behandeling van lineaire functies en ongelijkheden in klas II en van kwadratische functies en ongelijkheden in klas III

staan vele andere die met mij van mening zijn, dat deze onderwerpen voor de bedoelde klassen te zwaar zijn [1]). Deze stof kan beter naar de bovenbouw verschoven worden.

3. Als een leerling het toekomstige minimale minimumprogram (hiermee bedoel ik: zonder dat de leraar van de gelegenheid gebruik gemaakt heeft om meer dan het minimum te doen) tot een goed einde heeft gebracht en alles met bijv. gemiddeld cijfer 7 doorstaan heeft, heeft hij dan voldoende ondergrond om het bovenbouwprogram te volgen? Kan men met enige zekerheid vaststellen, dat hij voldoende aanleg voor de B-afd. heeft? En hoe staat het met zijn routine? Dit laatste vervult mij nog met de meeste zorg. De commissie merkt ergens op: voor het vak statistiek bleken 50 uren nodig te zijn. Dat bleek dan voor leerlingen van huidige gymnasia. Zal dat nog zo zijn, als het minimale minimumprogram voor de onderbouw ingevoerd is? In 1937 werd het interpoleren bij het gebruik van logarithmentafels afgeschaft; thans dreigen alle berekeningen van enigszins ingewikkelde vormen afgeschaft te worden. Kon vroeger een leerling nog eens echt cijferen als hij een gevonden wortel ter contrôle in de vergelijking moest substitueren (waar gebeurt dit nog?), thans dreigen de vergelijkingen zo simpel te worden, dat dit substitueren op een hoofdrekensommetje zal uitdraaien. Men stelle zich maar eens een vergelijking voor met x in de noemers (meervoud!), die zonder het begrip K.G.V. opgelost moet kunnen worden. Hoofdrekenwerk! Hoe leerlingen met zo weinig routine ooit binnen redelijke tijd een standaarddeviatie moeten becijferen, is mij een raadsel.

4. De commissie verraste ons ter vergadering (Amsterdam, 26 Februari) met een gedetailleerde urentabel, waarbij het niet mogelijk was kritiek te oefenen. Hier volge deze dan. De commissie stelde klas IV op 5 × 37 u en klas V op 5 × 16 u, tesamen 265 u (de rest van de tijd in klas V was voor herhaling bestemd). Deze uren werden als volgt verdeeld:

Algebra met Differentiaal- en Integraalrekening	: 60 u
Goniometrie	: 30 u
Analytische Meetkunde	: 45 u
Stereometrie	: 80 u
Statistiek	: 50 u

Nu verzoek ik de lezers achter elk aantal uren de getallen 37 en 16 te plaatsen. Wat ziet men dan?

[1]) Ik heb er overigens al veel geld mee verdiend; pupillen van de leraren, die het niet te moeilijk vinden, moeten toch ergens bijles hebben!

1° 1 u in IV en V (= 53 u) is voor Algebra te weinig,
1 u in IV en 2 u in V (= 69 u) is voor Algebra te veel.
2° 1 u in IV is voor Goniometrie te veel.
3° 1 u in IV is voor Anal. Meetk. te weinig,
1 u in IV en V is voor Anal. Meetk. te veel.
4° 2 u in IV of 1 u in IV en 1 u in V is voor Stereometrie te weinig,
2 u in IV en 1 u in V is voor Stereometrie te veel.
5° 1 u in IV is voor Statistiek te weinig,
1 u in IV en V is voor Statistiek iets te veel.

Het moet allemaal precies sluiten! Men zal elke week moeten vaststellen, welk vak men wel, en welk men niet zal behandelen. Rust heeft men helemaal niet meer, men moet voort, voort, voort. En dat juist in een tijd, waarin zoveel geremde leerlingen voorkomen, kinderen met goed begrip, maar met een ijselijk langzaam tempo. Wil men ons al deze vakken voorzetten, accoord, maar dan moet er *royaal* tijd voor uitgetrokken worden.

Nog enkele losse opmerkingen.

a. De commissie acht van geen belang o.a. herleiding van veeltermen waarin vierkante haken voorkomen, en delingen zoals $(x^6 - 1) : (x^2 - x + 1)$. Zijn dat nu juist geen onderwerpen, waarbij accuraat werken kan worden beoefend? Is dat niet hoognodig? Het treft ook wel, dat de commissie bij de opsomming van de vier criteria, die gegolden hebben bij de keuze van de leerstof, niet heeft opgenomen: *bevordering van snel en accuraat wiskundig rekenen.*

b. Het is mij niet duidelijk geworden, wat voor nut de commissie ziet in het behandelen van allerlei talstelsels. Ook de theorie van de machtlijnen lijkt mij niet meer dan een meer of minder plezierig spel.

c. Als we eenmaal ernstig de infinitesimaalrekening gaan beoefenen, zullen we onvermijdelijk behoefte krijgen aan het getal e. De commissie zegt daarvan: de differentiaalquotiënten van de exponentiële en logarithmische functie staan niet op het programma; het getal e ook niet. Ik wil daar niet zo maar mee accoord gaan; wat zegt de commissie van de integralen van x^p? Wel van x^4 en van x en van x^{-3}, maar niet van x^{-1}? Dat houden we toch niet vol. Bovendien lopen we de kans dat een oud-leerling zijn kennis echt eens gaat gebruiken; hoe zullen we ons verontschuldigen als hij ons verwijt hem onvolledig ingelicht te hebben? De weg is dan ook: vanuit de integraal naar e. (Zie Lely, Eucl. jg **5**, blz. 5; Gerretsen jg **12**, blz. 263; de Haan, Kennismaking met het getal e in de schoolwiskunde, jg. **30**, blz. 130; zie ook het boekje van Prof. Gerretsen: Niet-Euclidische Meetkunde).

Ik kom tot een voorstel.

1. De klassen I, II en III behouden 3 × 5 u; uit het program vervallen de kwadratische functies en ongelijkheden. Echter worde er aandacht besteed aan accuraat wiskundig rekenen (de onderwerpen op blz. 166, 2*abc* en 5 van het rapport blijven gehandhaafd).

2. De kwadratische functie en ongelijkheden gaan naar klas IV.

3. Bij de integraalrekening moet ook de integraal van x^{-1} aan de orde komen en het getal *e* worden ingevoerd.

4. De Beschrijvende Meetkunde worde *geheel* geschrapt en vervangen door het stereometrisch verantwoord tekenen van (eventueel nader te omschrijven) enkele lichamen in eenvoudige standen.

5. De urenverdeling worde in de klassen IV en V als volgt:

	IV	V
Algebra + Diff. en Integr. rek. en Goniometrie	2	3
Analytische Meetkunde	1	1
Stereometrie	2	1
Statistiek	1	1
	6	6

Dus niet bijv. 60 u voor een bepaald vak; maar een volledig jaaruur. Men kan zich dan vrij bewegen en eventueel overblijvende tijd zelf nuttig besteden. De voorgespiegelde vrijheid van de docent wordt dan misschien geen fata morgana.

H. STREEFKERK.

OPMERKINGEN NAAR AANLEIDING VAN HET ONTWERP-EINDEXAMEN-PROGRAMMA VAN DE WIMECOS LEERPLAN-COMMISSIE 1954

J. Korff

Het ten aanzien van het voorgestelde wiskundeprogramma (commissieprogramma = C.P. te noemen) door Dr Streefkerk betoogde, kan ik volledig onderschrijven:

om in de bovenbouw zeer vluchtig iets aan hogere wiskunde en statistiek te kunnen doen, zal in de onderbouw nog erger moeten worden gejakkerd, dan reeds nu het geval is; het functiebegrip zal nu onherroepelijk op een leeftijd ingevoerd moeten worden, waarop het overgrote deel der leerlingen het niet kan verwerken. Het resultaat zal worden, dat, daar gewone routine-onderwerpen niet of onvoldoende worden beheerst, bij de behandeling van diepergaande vraagstukken de leerlingen vastlopen, doordat technisch bijkomstige moeilijkheden het uitzicht op het wezenlijke van het probleem wegnemen.

Hoezeer de commissie aan het tijdschema heeft moeten passen en meten blijkt, behalve uit het door Dr Streefkerk reeds betoogde, naar mijn gevoelen onder meer nog uit onderstaande voorbeelden:

a) De commissie acht van geen belang *de ontbinding van* $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 1)$ in de eerste klasse, daar het geval $a \neq 1$ bij de behandeling van de kwadratische functie thuishoort. Hierin heeft de commissie volkomen gelijk, maar het zijn in de 3de en hogere klassen alleen de mathematophobe leerlingen, die $6x^2 + 7x - 5$ ontbinden door de 0-punten van die vorm met de wortelformule op te zoeken, of die een kwadraat zoeken af te splitsen. Wij dienen toch juist te strijden tegen de neiging der leerlingen om deuren met de sleutel erin te openen door kanonschoten. De behandeling van $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 1)$ kost in de eerste klasse mogelijk 5 uur. Maar de vermoedelijke tijdnood is zo ernstig, dat dit er blijkbaar niet af kan.

b) Ik kan me niet indenken, dat onze vraagstukken de leerlingen nooit eens zullen stellen voor het probleem de 0-punten van $x^2 - x\sqrt{7} + \sqrt{3}$ te voorschijn te brengen. Moeten we dan met de uitkomst $\frac{1}{2}\{\sqrt{7} \pm \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\}$ genoegen nemen? Daardoor loopt

alles mis en wordt het opgeven van redelijke vraagstukken vaak onmogelijk. Toch zal zo'n vraagstuk volgens het C.P. niet meer gesteld kunnen worden. De *splitsing van* $\sqrt{a \pm b\sqrt{c}}$ kost misschien 4 lessen, maar dat gunt ons het C.P. niet. Opnieuw: belangrijk is dit heus niet, maar het is voor de leerlingen aangenaam zóveel routine te bezitten, dat ze door zo'n vorm heen kijken.

c) Vraagstukken over *middelste termen bij reeksen* mogen niet worden opgegeven, volgens het C.P. Met slechts enkele vraagstukken is dit te behandelen, evenals het eveneens geschrapte interpoleren. Inderdaad, het gaat weer om iets, dat men een foefje kan noemen. Maar de oplossing van welke differentiaalvergelijking, in het algemeen van welk wetenschappelijk probleem ook, is niet als een „foefje" aan te merken. Alleen, zegt Dirichlet, je moet er maar op komen. En dat vereist routine, het *leren* zien van symmetrieën e.d. Dit vraagt van de zijde van de docent voortdurend deze mogelijkheden aan te wijzen. Ook onderscheidt men in de vaardigheid waarmee de leerlingen de „foefjes" hanteren toch maar zeer sterk de mathematophoben en -phylen.

d) Voor *ingeklede vergelijkingen* is practisch geen tijd meer beschikbaar. De voorzitter heeft ter vergadering er harde woorden over gezegd. Het is ook echt iets voor ietwat geborneerde, ouderwetse schoolmeesters om zich daarover druk te maken, schijnt het.

Te dol is echter, dat als men in de tweede klasse een vraagstuk opgeeft waarin twee arbeiders werken, deze 14 dagen doen over iets dat A alleen in 8, en B in 6 dagen opknapt. Maar dergelijke antwoorden krijgt men van de overgrote meerderheid der leerlingen Inderdaad, vraagstukken over cijfers die kringetje wisselen, werkende arbeiders, picnickende wandelaars, mengende kruideniers, ze zijn niet verheven. Maar we hebben de — misschien weerzienwekkende — plicht te vervullen, de onbekenden zo te leren stellen, dat er iets verstandigs gebeurt. Hiervoor is routine nodig, hiervoor zijn *vele* lessen nodig, zeker niet 4 of 5, maar 20 en meer, niet even terloops in de eerste klasse, maar systematisch te beginnen in de tweede klasse, als ook het oplossen van vergelijkingen met méér onbekenden aan de orde kan komen. Dit klemt te meer, omdat het L.O. de „redeneer"vraagstukken slecht of niet meer behandelt. En de kinderen zitten met de brokken bij natuurkunde en scheikunde. Nu is het bij het vigerende programma door tijdnood al moeilijk ernstig op dit onderwerp in te gaan; het C.P. echter maakt het zo goed als onmogelijk.

In dit verband is het goed te wijzen op de ergerlijke tijdsbeknot-

ting op het vak wiskunde in de laatste drie, vier decennia. Van 29 klokuren zijn we teruggevallen op 25 lesuren of 21 klokuren. Vergeleken bij vroeger is dan weliswaar de theorie der rekenkunde verdwenen, maar deze verlichting staat niet in verhouding tot de verzwaring, niet alleen in het voorgeschreven programma, maar ook in de aard der vraagstukken, die thans op het eindexamen gesteld worden. Zittenblijven en bijles compenseren het gemis aan officiële lestijd. Maar de officiële les is nu al, en zal juist door de toename der hoeveelheid van onderwerpen nog meer worden gebonden aan een uiterst krap tijdschema waaraan men zich moet houden met de grootst mogelijke onverbiddelijkheid.

Een vraag, die we ons verder dienen te stellen is: *wat wint de leerling bij dit nieuwe programma.*

De aandacht van de leerlingen moet in de bovenbouw volgens het C.P. over meer onderwerpen worden verdeeld dan thans. Wat is het nut nu in het bijzonder van de *integraalrekening* en de *statistiek*? Het lijkt allemaal zo logisch, deze vakken spelen een steeds groter rol in economie, techniek en wetenschap. Gééf ze dus. In het buitenland geeft men deze vakken, dus wij óók.

Nu is dit laatste direct al een argument dat wij nooit mogen gebruiken. Géén land heeft in z'n onderwijs zo met het talenprobleem te maken als Nederland. Voor de technicus, econoom en wetenschapsman in spé is een deel van z'n gereedschap juist zijn talenkennis. Met minder tijd en energie dan de B-leerling thans daaraan besteedt, komt hij er later niet.

Juist door de talenkennis is het, dat de Nederlander op internationaal niveau z'n rol kan spelen. Niet alleen, dat wij daar van onze vreemde talenkennis rechtstreeks gebruik maken, minstens even belangrijk is het, dat wij ook als we niet in rechtstreeks contact tot het buitenland staan, in staat zijn van alle vaklitteratuur van enige betekenis en ook van de algemene kennis te nemen, waardoor bij ons de openheid en de bereidheid aanwezig zijn om velerlei stromingen op ons te doen inwerken.

Ons vreemde-talen onderwijs betekent voor de overgrote meerderheid der leerlingen niet alleen een belangrijk energieverbruik, maar erger nog aandachtsstrooiing. De exacte vakken zullen dit probleem op de middelbare school niet mogen bagatelliseren.

Met het nut van de *integraalrekening* nu is het merkwaardig gesteld. Jarenlang heb ik samengewerkt met M.T.S.'ers van verschillende studierichtingen en chemische ingenieurs. Wat wij volgens het C.P. aan onze leerlingen van de integraalrekening kunnen bijbrengen is slechts een minimale fractie van wat deze mensen daarvan

krijgen. Nu ontmoet men in het algemeen zeker bij de M.T.S.'er, maar ook bij de chemisch ingenieur de grootst mogelijke vrees voor de toepassing van de integraalrekening en voor het vak zelf. Dit komt enerzijds, omdat bijna elk practisch vraagstuk bij wiskundige aanpak het volledig arsenaal der analyse verlangt. Deze mensen anderzijds kunnen zonder blikken of blozen schrijven $\int a^{dx}$ of $\int \frac{x}{dx}$, tenminste als ze zo enkele jaren in de practijk zitten. Na enige mislukkingen geven ze de strijd op. Betoog ik nu, dat men daarom de M.T.S.'er of de chemisch ingenieur z'n wiskundige propaedeuse moet onthouden? Zeker niet, maar wel wil ik gesteld zien: dat allerverschrikkelijkst kleine beetje integraalrekening, dat wij zouden kunnen bijbrengen is zo weinig, dat de practische toepasbaarheid illusoir wordt.

Ik wilde aan deze ervaring dit toevoegen: wie onzer leerlingen zouden er iets aan hebben?

Nog niet de helft van onze leerlingen gaat academisch studeren. De niet-academici onder hen krijgen heus geen functies, waar ze theoretische problemen voorgelegd krijgen, althans tegen de tijd, dat de enkeling onder hen het zover brengt, is hij die integraalrekening van ons al lang weer kwijt, omdat het veel te weinig was om een gesloten logisch geheel te vormen. Ook voor de wiskundige analysten (hoeveel totaal zullen het er worden?) is het weer: wij kunnen zo weinig geven, dat we hoogstens verwarring en afkeer stichten.

De studenten onder onze oud-leerlingen voor wie integraalrekening nut zou kunnen opleveren, kunnen we in drie groepen onderscheiden:

1. degenen, die een wiskundige opleiding zullen ontvangen, minstens op het niveau van de chemisch ingenieur. Deze hebben aan onze integraalrekening géén behoefte, want ze krijgen ze in zo'n omvang dat de door ons aangebrachte kennis verwaarloosbaar wordt.

2. de economen, voor wie steeds meer aandacht aan een min of meer zorgvuldige opleiding in de wiskunde-opleiding wordt geschonken, zozeer, dat voor hen de conclusie onder 1. geldt.

3. de biologen, artsen, enz.

Het is waanzin deze mensen op hun propaedeutische colleges een integraal voor te toveren: men legt daarmee een rookgordijn om het behandelde probleem. In dergelijke gevallen kan men beter, hetzij de oplossing met integralen vervangen door reeksen, dan wel eenvoudig de uitkomst der rekensom geven (men zie in dit verband b.v. de behandeling van de monomoleculaire reactie door Kruyt in:

Inleiding tot de physische chemie en General Physics van Edser).

Kon men nu inzien, dat het C.P. zoveel tijd in de bovenbouw vrijmaakte, dat wij in dat voor ons luxe-artikel kwamen te zwemmen, en hadden verder de kinderen de neiging tot misdaad te vervallen wegens gebrek aan bezigheden, dan was dat allemaal nog wat anders. We dienen toch ook eens de positie onzer leerlingen te beschouwen. Betrouwbare opgaven over de aan huiswerk bestede tijd hebben me geleerd, dat uitstekende leerlingen in de 4de klasse per week meer dan 20 uur huiswerk hebben. Gewone leerlingen (zijn die wel zo erg gewoon?), die de 5-jarige cursus in één keer halen, komen tot 25 uur per week en zijn dan vaak nog niet klaar. Het ter ontspanning verplichte boekenlezen is daarin nog niet verdisconteerd. In de 5de klasse wordt dat allemaal nog wat erger. We kunnen ons daarvan misschien niets aantrekken, maar daarmee blijven we schuldig aan een toestand die vroeg of laat tot drastische maatregelen aanleiding zal geven, en dan kon de balans wel eens te veel weer de andere kant opslaan.

Samenvattend:

1. Integraalrekening is een rekenwijze waarvan wij voor diegenen, die ze later zullen gebruiken zo verschrikkelijk weinig kunnen geven, dat wij eerder verwarring zullen stichten dan hulp bieden.

2. Voor diegenen, die weinig in de gelegenheid zullen verkeren deze rekenwijze toe te passen (dus de hele groep van artsen, biologen, de niet-academici) is het vak overbodig, omdat de practische toepasbaarheid door gebrek aan routine tot nul wordt gereduceerd.

Thans nog iets over het onderwijs in de *statistiek.*

Inderdaad is het zo, in tegenstelling tot de integraalrekening, dat men hier voor uitgebreide groepen studenten met een acute behoefte te maken heeft. Niet-academici zullen dit vak eerst zelfstandig beoefenen na het veroveren ener hogere positie; hun aantal is natuurlijk gering.

Ik heb om over de betekenis der statistiek tot een enigszins gefundeerde opvatting te komen enige artsen-specialisten, twee schoolartsen en enkele landbouwkundige ingenieurs eens gepolst, en verder een opleider voor de statistiek voor de accountantsexamens van het Nederlands Instituut van Accountants.

De behoefte aan statistiek is zeer groot. Men moet echter ten zeerste betwijfelen of de kinderen al rijp zijn voor de statistiek. De practijkmensen stellen het veelal zó, dat experimentele ervaring eerst de behoefte aan en de waarde van statistiek doet gevoelen.

Statistiek is zeer typisch een vak, waarvan niet aan de ervaring van het onderdeel der wetenschapstak die men beoefent getoetste kennis meer ellende veroorzaakt dan voordelen biedt.

Voor medici b.v. zou het gunstigste tijdstip voor de statistiek komen tussen candidaats- en doctoraalexamen. En dan is het zeer de vraag of een wiskundige als docent daar op z'n plaats is, of dat niet veeleer een medicus, die zich wiskundig specialiseert, daar leiding moet geven. Het gaat toch niet om het vinden van getallen, maar om wat die getallen de medicus zeggen. Het lijkt me voor een wiskundige een wel zeer zware taak om zich medisch zover te specialiseren, dat hij de getallen in de medische taal kan overzetten. De behandeling van de statistiek op de universiteit is thans vaak onbevredigend; dat hoeft niet uit te sluiten, dat men het daar niet goed zou kunnen doen en ook hier en daar niet goed doet.

Met nadruk zou ik nog eens willen betogen, dat de overbelasting èn van het gehele programma èn van het wiskundeprogramma voor het gangbaar leerlingentype zó groot is, dat het doen wegvallen van enkele onderwerpen van bestaande vakken zoals het C.P. dit voorstelt, niet opweegt tegen de verzwaring die ontstaan zal door wat erbij zou komen.

Het hulpmiddel: maak de H.B.S. 6-jarig, geeft niets. Dat 6de jaar is nu al overtekend. Zelfs bij vermindering van de leerstof zal een 6-jarige H.B.S. nog zwaar genoeg zijn door de veelzijdigheid die aan aanleg en aandacht moet worden gesteld.

Samenvattend: aan de statistiek zal in het Nederlandse onderwijs een grotere plaats ingeruimd moeten worden. De H.B.S. lijkt me daarvoor niet de aangewezen plaats om vaktechnische redenen, maar ook omdat het programma al rijkelijk is overbelast.

Verder wil ik de vraag opwerpen: maakt het vele taaie rekenwerk, dat ik in de practijk van de statistiek daaraan steeds verbonden ontmoette, dit vak al haast niet onbruikbaar als schoolvak? In deze mening werd ik versterkt door een passage in het voorwoord van: Introduction to statistical method (Brookes and Dick). Men vindt daar:

A disadvantage of statistics is that the excercises normally involve much arithmetical computation. This is unavoidable; until schools can afford to add a computing machine to the mathematical laboratory, the difficulty will have to be faced. Some may suggest that the arithmetic of the exercises could be reduced, for example, by increasing the class-intervals and reducing the frequencies of a distribution; but it has to be remembered that, as many of the statistical ideas are applicable only to large samples, it would be

misleading and possibly erroneous to simplify the exercises too much.

Ik zou willen pleiten voor een programma waar:

A) *in de onderbouw* bij algebra ouderwetse routine wordt bijgebracht, zodat de leerlingen de structuur van gewone vormen zoals die later in algebra, mechanica en analytische meetkunde voorkomen, door en door kennen; zolang we daar ook nog de toekomstige A-leerlingen moeten meeslepen, is het functie-onderwijs daar niet verantwoord, zeker niet bij de heersende opvattingen over de eisen aan de wiskundige potentie dezer leerlingen te stellen.

B) *in de bovenbouw*:

1. *de algebra* in de tegenwoordige vorm zo ongeveer behouden blijft, al kunnen enkele stunts verdwijnen; toevoeging van de exponentiële en logarithmische functie, zoals het C.P. voorstelt, is wenselijk juist voor degenen, die later weinig of geen wiskunde meer krijgen. Complexe getallen acht ik voor practisch alle leerlingen overtollige ballast, wat niet betekent, dat men de gedachten niet in deze richting zou mogen leiden.

2. de *differentiaalrekening* van eenvoudige algebraische en goniometrische vormen tot en met de 2de afgeleide wordt behandeld. Ondanks Dr Wansinks betoog, dat men het zonder kan, krijgt men een scheef geval als men de 2de afgeleide weglaat, omdat:

a. als iemand vertelt dat hij iets aan differentiaalrekening heeft gedaan, men altijd zal veronderstellen, dat hij de 2de afgeleide wèl kent.

b. de aansluiting bij de mechanica dit nu eenmaal verlangt.

3. de *goniometrie* in de geest van het C.P. wordt gegeven.

4. de *analytische meetkunde* de omvang heeft door het C.P. voorgesteld.

5. de *stereometrie* gevraagd wordt zoals het C.P. die verlangt, maar zonder scheve projectie. Dat worde de lijntekenleraar opgedragen. Men kan daarbij b.v. denken aan de verplichting, dat werkstukken de gecommitteerden ter inzage worden gegeven.

In vergelijking tot de gebruikelijke stof betekent dit: algebra practisch onveranderd; goniometrie zéér gereduceerd, beschrijvende meetkunde totaal weg, differentiaalrekening in een vorm die door de mechanica wordt gedekt en deze wederkerig steunt; de door de goniometrie en beschrijvende meetkunde vrijkomende tijd worde besteed aan de analytische meetkunde en moge verder de leerlingen

en ons de rust schenken die van onze lessen iets anders zal maken dan het afjakkeren van een te krap gestelde dienstregeling.

Mocht blijken, dat er dan tijd vrijkwam, dan nog zou ik daarvan geen gebruik gemaakt willen zien voor de integraalrekening of de statistiek, omdat daarvoor nooit werkelijk genoeg tijd beschikbaar kàn komen, maar dan zou ik allereerst aan de orde gesteld willen zien de behandeling van het getal e, omdat men daarmee van dienst kan zijn juist diegenen, wier mathematische opleiding na de H.B.S. niet wordt voortgezet, dus weer de groep der biologen, artsen, en ook de groep der niet-academici. Contact met deze groepen leert, hoe vol mysterie het begrip e voor hen is. Een rustige behandeling uiteraard gericht op de toepassingsmogelijkheden van e zal veler vrees voor e doen verdwijnen.

Tenslotte nog dit:

het streven om H.B.S. en gymnasium-β éénzelfde wiskunde-programma te geven kan men vanuit het standpunt van het lyceum begrijpen. Tegenover H.B.S. en gymnasium is het onrechtvaardig. Een dergelijk gecoördineerd programma zal voor de één te veel, dan wel voor de ander te weinig zijn. Het enige meerdere dat de H.B.S. in natuurwetenschappelijk opzicht zou geven, zou dan de mechanica zijn. Een aldus gecoördineerd programma houdt echter ook de afschaffing van mechanica in, daar men thans 1e jaars studenten krijgt met en zonder mechanica-vooropleiding. Dat zou leiden tot een H.B.S. die haar karakter verliest en geen zelfstandig schooltype meer vertegenwoordigt, maar wordt gymnasium minus de oude talen. Wil de H.B.S. B blijven een school die positieve selectie waarborgt en niet wordt het toevluchtsoord voor de minder intelligenten van het lyceum, die waardig de terecht verworven traditie voortzet van *de* vooropleiding voor ingenieursstudie en de studie in de exacte vakken en in de medicijnen, dan heeft de H.B.S. B recht op een wiskunde-programma, dat misschien niet veel omvangrijker is dan dat van het gymnasium β, maar waar op het eindexamen zeker met meer diepgang wordt geëxamineerd.

ONDERSCHRIFT BIJ DE ARTIKELEN VAN DE HEREN KORFF EN DR. STREEFKERK

Naar aanleiding van de artikelen van de heren Korff en dr. Streefkerk wil ik als voorzitter van de leerplancommissie 1954—1955 van Wimecos gaarne enkele opmerkingen maken die stellig ook de mening van de overige commissieleden vertolken.

Hierbij ga ik uit van het standpunt dat het niet gewenst is thans terug te grijpen op de inhoud van de programma's die de instemming van Wimecos, Liwenagel en de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O. hebben verworven, maar dat het wel zin heeft diverse punten te bespreken die de nadere uitwerking van die programma's betreffen.

In dit verband wijs ik erop dat het de bedoeling van het Bestuur van Wimecos is de paragrafen 7 en 9 van het rapport (toelichting op de programma's) in de a.s. jaarvergadering van Wimecos in discussie te brengen, omdat er in de vergadering van 26 Februari 1955 geen discussietijd hiervoor beschikbaar is geweest, terwijl bovendien het Mathematisch Centrum de vacantiecursus, die op 31 October en 1 November 1955 te Amsterdam wordt gehouden, geheel aan het nieuwe leerplan zal wijden.

a. De heer Korff wenst de integraalrekening en de statistiek van het programma af te voeren. Hij acht de practische toepassingen van de integraalrekening illusoir. De Commissie beschouwt de toepassingen die bij de berekening van oppervlakten van vlakke figuren en van inhouden van lichamen gemaakt kunnen worden naast de toepassingen in de fysica en de mechanica als een voldoende rechtvaardiging van dit onderwerp bij het V. H. M. O. Volgens de ervaringen van de Commissieleden bij de ten uitvoerlegging van het leerplan-1937 leent dit onderwerp zich wel voor behandeling op onze scholen.

Misschien mag ik de heer Korff er in dit verband op wijzen, dat in België de beginselen van de integraalrekening juist worden onderwezen in de afdelingen Latijn-Grieks, Latijn-Wetenschappen en in de Economische afdeling, waar het beschikbare urental voor de wiskunde kleiner is dan in de afdeling Latijn-Wiskunde en in de Wetenschappelijke afdeling, terwijl de wiskunde voor de bedoelde groep van studenten later hoogstens hulpwetenschap wordt.

Wat de statistiek betreft kan ik volstaan met een verwijzing naar het rapport. De antwoorden op de vragen die ik aan velen gesteld heb aangaande de betekenis van de statistiek getuigen van een waardering die diametraal verschilt van die van de heer Korff. Belangrijker dan deze persoonlijke kijk lijkt me echter de geslaagde proefneming van het Paedagogisch Instituut te Utrecht onder leiding van dr. Bunt met het onderwijs aan α-leerlingen van het Gymnasium.

Dr. Streefkerk wenst het getal e en de integratie van x^{-1} aan het programma toe te voegen. Ook na lezing van de beschouwingen van dr. Streefkerk blijf ik me er over verheugen, dat de Commissie deze onderwerpen niet aan de verplichte leerstof heeft toegevoegd. De Commissie meent n.l., dat deze toevoegingen in de naaste toekomst een ongewenste groei van de leerstof met zich zullen meebrengen, terwijl de onzekerheid die er voorlopig blijft bestaan ten aanzien van de benodigde tijd en de vrees voor overlading van de bovenbouw die van andere zijde tot uitdrukking komt, een verzwaring van het programma zoals dr. Streefkerk voorstaat, niet gewenst maken.

b. De Commissie kan niet inzien, dat het programma voor de bovenbouw bij de urenverdeling zoals deze thans is geschat vrijwel onuitvoerbaar zou zijn, alleen al omdat de veelheid van onderwerpen een goede verdeling van de uren onmogelijk zou maken. Het is toch niet nodig dat voor elk onderdeel van het programma een constant geheel aantal wekelijkse lesuren het hele schooljaar door beschikbaar gesteld zou moeten worden. Dit is ook thans niet het geval! In mijn onderwijs althans noch voor algebra, noch voor driehoeksmeting noch voor stereometrie, noch voor beschrijvende meetkunde. Dit betekent echter geenszins, dat we elke week opnieuw zouden moeten vaststellen, welk vak nu wel en welk niet behandeld zal moeten worden. Er zal in deze geen wezenlijk verschil komen vergeleken bij de tegenwoordige toestand. Inderdaad is de urenverdeling speculatief, evenals trouwens die van dr. Streefkerk. Eerst na enige jaren, als er met het nieuwe programma gewerkt zal zijn, zal blijken welke gemiddelden (welke totalen) de benodigde tijd beter aangeven dan de schattingen van dr. Streefkerk en van de Commissie.

c. Wat de losse opmerkingen betreft, wil ik gaarne ingaan op het verwijt van dr. Streefkerk, dat de Commissie verzuimd zou hebben bij de criteria voor de leerstofkeuze ook nog op te nemen: „bevordering van snel en accuraat wiskundig rekenen". Ik kan hem

de verzekering geven dat de Commissie deze bevordering van harte toejuicht, en dat dit rekenen, mits men het programma in zijn geheel beschouwt, bij de voorstellen van de Commissie niet in het gedrang behoeft te komen. Het snel en accuraat rekenen behoort tot de beoogde wiskundige vorming, waarvan op blz. 4 van het rapport blz. 152 van Euclides) sprake is. Het verschil tussen de opvattingen van dr. Streefkerk en die van de Commissie zal echter hierin gelegen zijn, dat de laatste de rekenvaardigheid wil doen verwerven aan de hand van oefenmateriaal over leerstof die ook uit anderen hoofde als gewenst moet worden beschouwd (zie de criteria op blz. 152), terwijl de eerste ook oefenmateriaal wil inschakelen over leerstof die in het onderwijs verder geen functie heeft.

d. Naar het oordeel van de Commissie is er zo veel besnoeid op leerstof en oefenmateriaal voor de lagere klassen, dat men de kwadratische functies en ongelijkheden in de omvang van het conceptprogramma stellig mag handhaven. De vergadering van 26 Februari heeft dan ook het voorstel van dr. Streefkerk om deze leerstof naar de bovenbouw te doen verhuizen, verworpen. Overheveling van leerstof uit de onderbouw naar de bovenbouw brengt het gevaar met zich mee, dat de tijd die daar nodig is voor de behandeling van de nieuwe leerstof, in het gedrang zou komen.

En om deze nieuwe leerstof in de hogere klassen is het in de eerste plaats begonnen!

Arnhem, 27 augustus 1955. JOH. H. WANSINK.

GEWOONTEN, VERRASSINGEN EN VREUGDEN IN HET WISKUNDE-ONDERWIJS

door

Dr W. BURGERS [1])

Wanneer didactiek een kunst is, om anderen wegwijs te helpen in een omgeving, die ons vertrouwd is of om het bescheidener uit te drukken, die ons vertrouwd toeschijnt, dan zal didactiek een sterk persoonlijk accent niet kunnen ontberen.

Wil didactiek geen onvruchtbare boekenwijsheid zijn, dan moet ze weerklank oproepen, dan moet ze iets van onszelf uitstralen, dat resoneert bij onze leerlingen.

Zeker, er zullen algemene regels zijn op te stellen, waarnaar we ons onderwijs dienen in te richten. Deze zijn de fundamenten van het goede leerboek. Een leerboek, ook het goede, kweekt echter gewoonten. En nu bedoel ik niet die eigenaardigheden, die we gemakkelijker bij collega's, dan bij ons zelf ontdekken en waaruit het type „leerkracht" ontstaat, met de titel „echte leraar", een titel, die we niet erg op prijs stellen.

Het leerboek kweekt doceergewoonten, die ons onderwijs stabiliseren. Onderwijsvernieuwing is progressief. Hierbij denkt men in termen als: onderwijssystemen, leerlingenschaal, lesuren-aantal . . . misschien ook aan salarisverhoging.

Maar in ieder van ons moet een vernieuwing in engere zin werkzaam zijn, een vernieuwing, waarvan het leerboek de eerste vijand is, omdat het een verstarring in de hand werkt.

Het is mijn ervaring, dat een jong leraar graag teruggrijpt naar het leerboek van zijn jeugd, graag die didactische wegen het eerst bewandelt, waarop hij zijn jeugdervaringen terugvindt.

Is het niet zo, dat er heel wat weerstand overwonnen moet worden, om tot invoeren van een nieuw leerboek te komen?

Op die gewoonten, die een leerboek in de hand werkt, wilde ik de aandacht vestigen met enkele voorbeelden.

Nemen we:

$$12 \cos x + 5 \sin x = 7.$$

Deze vergelijking lossen we op met behulp van een hulphoek. We

[1]) Lezing gehouden op de ledenvergadering van Liwenagel op 16 April 1955.

delen beide leden door 12

$$\cos x + \tfrac{5}{12} \cos x = \tfrac{7}{12}$$

We stellen $\frac{5}{12}$ gelijk aan $\operatorname{tg} \varphi$. Er komt: $\cos x + \operatorname{tg} \varphi \sin x = \frac{7}{12}$. Nu vermenigvuldigen we beide leden met $\cos \varphi$. Dit geeft:

$$\cos (x - \varphi) = \tfrac{7}{12} \cos \varphi$$

dus $\cos (x - \varphi) = \frac{7}{13}$, waarbij φ dan de scherpe hoek is, waarvoor $\operatorname{tg} \varphi = \frac{5}{12}$ is.

Wat een wonderlijke manier om in-efficient te zijn!

Bezien we dit procédé critisch, dan blijkt de eerste stap, delen door 12 stuntelig gekozen, want de derde stap, vermenigvuldigen met $\cos \varphi$, is opnieuw delen. Verder voeren we de goniometrische functie $\operatorname{tg} \varphi$ in, die onmiddellijk daarna wordt verdreven!

En toch vindt deze behandeling in vele schoolboeken een ereplaats Het komt mij voor, dat een betere methode op zijn plaats is. Het gaat er immers om, de gedachtengang aan de leerlingen duidelijk te maken. Nu kunnen we er eerst op wijzen, dat de twee-term $12 \cos x + 5 \sin x$ in ieder geval het rythme vertoont van de tweeterm $\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x$. Is het mogelijk de eerste, tot de tweede te herleiden?

We kunnen bezwaarlijk 12 vervangen door $\cos \varphi$, laat staan tegelijkertijd 5 door $\sin \varphi$. Daarvoor zijn deze coëfficienten te groot. We moeten beide coëfficienten dus zodanig verkleinen, dat de som van hun kwadraten 1 wordt, dus $\frac{144}{k^2} + \frac{25}{k^2} = 1$; hetgeen betekent, dat we beide leden moeten delen door 13.

In het algemeen krijgt men dus: $a \cos x + b \sin x = c$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

waarbij we dan $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi$ is en $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi$. Dus is φ bepaald op een veelvoud van 360°. Ingeval $a^2 + b^2$ geen kwadraat van een rationaal getal is, kunnen we ter bepaling van φ altijd gebruik maken van $\operatorname{tg} \varphi$.

De herleiding is kort en mist de geheimzinnigheid van de gebruikelijke methode.

Is het U al eens opgevallen, dat er in ons vraagstukken arsenaal, dat per jaar volgens Prof. v. Dantzig met ongeveer 10^8 stuks toeneemt, steeds type-inflaties optreden, die soms zulke vormen aannemen, dat explosies niet uitblijven?

Hierbij denk ik aan de „practische” samengestelde interest vraag-

stukken, aan de wortelvormen, aan berekeningen met logarithmen met geniepig opduikende mintekens, logarithmische en exponentiele vergelijkingen of ongelijkheden, die thans opbloeien als exotische bomen, waarbij de stam kreunend de kwistig uitbottende exponenten torst en niet te vergeten de vermoedelijk op sterk water staande worsten, vraagstukken, waarin allerlei leerstof gestopt wordt en waarbij de uiteindelijke vraag steeds verrast, zoals bij een worst de smaak, en de verwachting nooit vervuld wordt, dat ten slotte de leeftijd van de componist berekend moet worden.

Waarom spreken we steeds over „oneigenlijke machten" en nog wel op het moment, dat deze bewerking, zo niet volwassen, dan toch op zijn minst de pubertijd bereikt, in ieder geval uitgroeit boven de status van vermenigvuldiging, kortom van oneigenlijk juist eigenlijk wordt?

Verrassingen — Misschien zijn onze ervaringen verschillend, misschien overkomt U nooit, wat mij nog steeds overkomt, dat ik „in mijn eigen vertrouwde omgeving" dingen opmerk, die vroeger aan mijn aandacht ontsnapt waren?

Dan is dit voorbeeld voor mijn eigen schande. Het is alweer geruime tijd geleden, dat ik het invoeren van wortels besprak bij het kwadrateren van beide leden van een vergelijking.

Nadat ik eerst keurig met $A = B$ en $A^2 = B^2$ gemanipuleerd had, werd de theorie toegelicht met enige voorbeelden. Vooral legde ik de nadruk op de slagzin: „Een wiskundige is een lui mens".

Zo nam ik het voorbeeld zoals

$$\sqrt{x-6} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2x+5}$$

We zagen allemaal goed in, dat kwadrateren thans een onschuldige bezigheid was, omdat, dank zij de theorie, $\sqrt{x-6} + \sqrt{x-1} = -\sqrt{2x+5}$ in ieder geval vals is.

We vonden toen $2x - 7 + 2\sqrt{x^2 - 7x + 6} = 2x + 5$

of $$\sqrt{x^2 - 7x + 6} = 6.$$

opnieuw was kwadrateren onschuldig. En we waren dus overtuigd, dat de wortels van $x^2 - 7x - 30 = 0$ d.w.z. 10 en -3 beide moesten voldoen. Substitutie, hoewel overbodig, zou ons dit bevestigen.

U begrijpt de grote vreugde aan de ene kant, en de verslagenheid aan de andere kant, toen -3 niet bleek te voldoen.
want $3i + 2i \neq i$.

En de moraal? Ook door fouten te maken kan men wortels invoeren! Door dit voorbeeld leerde de meester bescheidenheid, en werd door meester en leerlingen het inzicht verbeterd.

Een andere verrassing, van recenter datum was het volgende. U kent allen het „nutteloze" vraagstuk:

Welke functies van x, zullen voor x gesubstitueerd in $\frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$, deze functie onveranderd laten?

Stellen we de gezochte functie(s) voor door y, dan zal men de vergelijking: $\frac{x^2 - x + 2}{x - 1} = \frac{y^2 - y + 2}{y - 1}$ moeten oplossen.

Men vindt de vergelijking: $y^2(x - 1) - y(x^2 + 1) + x^2 + x = 0$.

Hieraan voldoen de functies x en $\frac{x + 1}{x - 1}$.

De laatste is de gezochte.

Wat is hiervan de meetkundige betekenis? We doen het beste om daarvoor de grafiek van de functie: $\frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$ te schetsen.

Zo kom ik van zelf op de kwestie grafische voorstellingen. Dit onderwerp, is naar mijn bescheiden mening van het begin af gederailleerd!

Dikwijls vindt men eerst een inleidende cursus coordinatenleer, waarbij de berekening van de afstand van twee punten, de berekening van de coordinaten van het midden van een lijnstuk waarvan de eindpunten gegeven zijn, kortom een stukje analytische meetkunde, met alle nare gevolgen van dien.

Een strenge scheiding tussen grafische voorstellingen en analytische meetkunde is niet alleen gewenst, maar ook wel mogelijk.

Persoonlijk heb ik de grafiek van een functie altijd gezien als de verzameling van ordinaten, die de functiewaarden voorstellen, hierbij aansluitend aan „het bierverbruik per hoofd vanaf de tijd der kaninefáten tot op heden" of de grafieken, waarbij men met rechthoeken werkt.

Natuurlijk dienen we de y-as dan uit te bannen, dienen we geen grafieken te maken van vergelijkingen, dienen we geen afstandsberekeningen in te schakelen, en zeker geen vergelijkingen te gaan opstellen, die bij gegeven grafieken passen. Al deze problemen behoren in de analytische meetkunde thuis.

Het functiebegrip, dat toch al moeilijk te verwerken is, is met het gebruik van een y-as, op z'n zachtst gezegd, niet gediend.

Keren we terug tot het vraagstuk van daar straks.

$\frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$ kunnen we schrijven als $x + \frac{2}{x - 1}$.

We tekenen eerst de grafiek van de functie x en brengen daarop de correctie $\dfrac{2}{x-1}$ aan. (fig. 1).

Nu is deze correctie nooit nul, positief als $x > 1$, negatief als $x = 1$, zinloos als $x = 1$. Berekening van enkele correcties, en deze

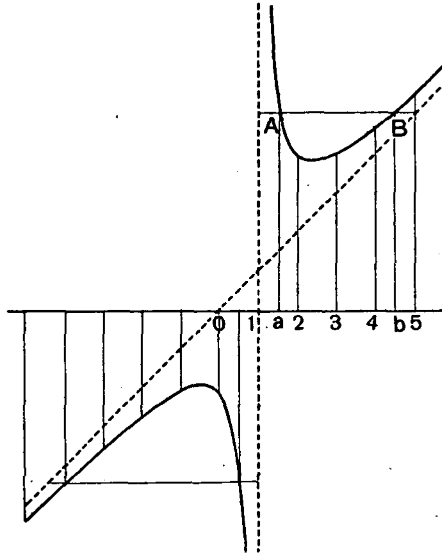


Fig. 1

aangebracht in de figuur, geeft direct in grote trekken het verloop van de grafiek.

Tekenen we nu een willekeurige niveaulijn, dan snijdt deze uit de grafiek (gewoonlijk) twee even grote ordinaten aA en bB. Blijkbaar is a een functie van b en zoals nu wel duidelijk is, is deze functie $\dfrac{b+1}{b-1}$.

Maar dan is $\overline{AB} = \left| b - \dfrac{b+1}{b-1} \right|$.

En we vinden dus de uiterste waarde(n) als men b zò kiest, dat $b = \dfrac{b+1}{b-1}$.

In tegenstelling met de gebruikelijke elementaire methode vinden we dus eerst de abscis(sen) van de uiterste waarde(n). Ook op meer ingewikkelde vraagstukken, is deze methode van toepassing. Neemt men de functie $x^3 - 3x$, waarvan de grafiek in grove trekken direct te tekenen is, dan wordt de berekening van de extremen:

$$x^3 - 3x = a^3 - 3a$$
$$(x - a)(x^2 + ax + a^2 - 3) = 0$$

Twee ordinaten vallen dus samen als $3a^2 = 12$ dus voor $a = \pm 2$. De abscissen van de extremen zijn $-\frac{1}{2}a$ dus ∓ 1.

De functie heeft daar de waarden ± 2 (zie fig. 2).

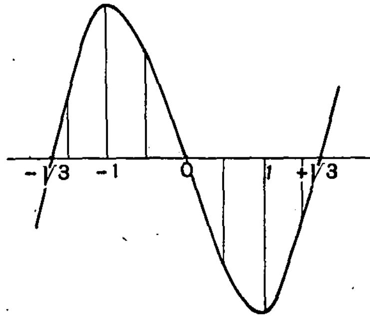


Fig. 2

Natuurlijk kan men nog nagaan of we te maken hebben met een maximum of minimum

$$(1+\varepsilon)^3 - 3(1+\varepsilon) = \varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 - 2$$

Voor voldoend kleine $|\varepsilon|$ is dit meer dan -2, zodat voor $x = 1$ de functie een minimum bezit. Op dezelfde wijze vindt men bij $x = -1$ dan een maximum.

Tot besluit nog een toepassing op de goniometrie.

Onderzoekt men in een driehoek de functie $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, dan kunnen we voor elke waarde van γ een ordinaat tekenen met maximale en minimale lengte overeenstemmend met de maximale opv. minimale waarde van deze functie.

We laten dan γ varieren van 0 tot 180° en krijgen op deze wijze een overzicht.

Nu is $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\gamma$, waarin $\frac{\alpha-\beta}{2}$ variabel.

De maximale waarde is dus $2\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\gamma$

de kleinste waarde krijgt men, als $\alpha = 180° - \gamma, \beta = 0, \frac{\alpha-\beta}{2} = 90° - \frac{1}{2}\gamma$. Dit wordt dus $2\sin\gamma$.

Wenst men $\triangle ABC$ echter scherphoekig, dan is α hoogstens 90°, $\beta = 90° - \gamma$ dus $\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$. De kleinste waarde is dan $2\cos^2\frac{\gamma}{2} + \sin\gamma = 1 + \sin\gamma + \cos\gamma$ (zie fig. 3).

Nu kunnen we de max. waarde van $2\cos\frac{y}{2} + \sin y$ weer elementair afleiden, door te schrijven:

$$2\cos\frac{x}{2} + \sin x = 2\cos\frac{y}{2} + \sin y$$

$$2\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{y}{2}\right) = \sin y - \sin x$$

$$-4 \,.\, \sin\frac{x-y}{4}\sin\frac{x+y}{4} = -2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Nemen we $x \neq y$ dan wordt dit

$$\sin\frac{x+y}{4} = \cos\frac{x-y}{4} \,.\, \cos\frac{x+y}{2}.$$

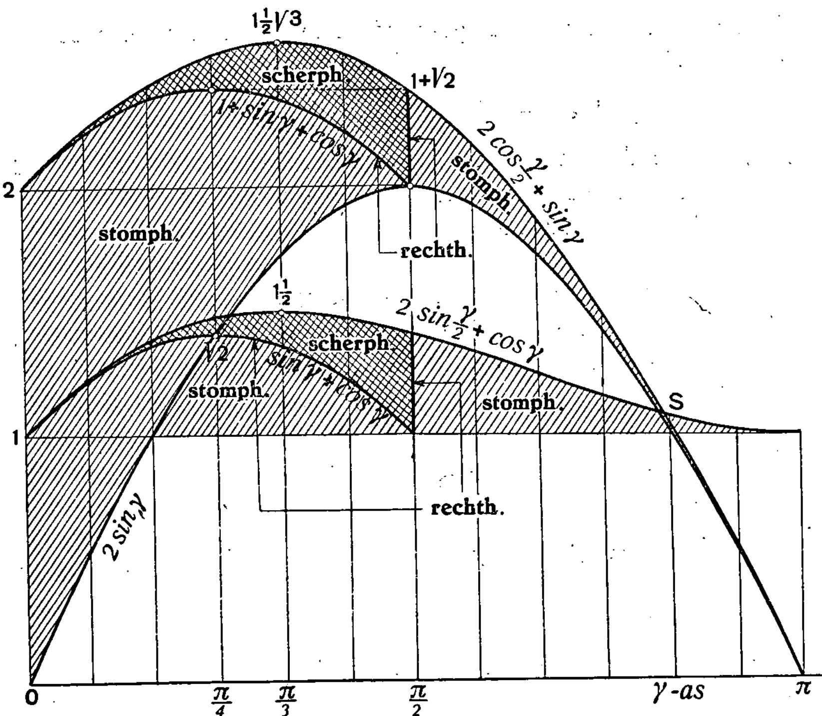


Fig. 3

Voor het extreem zal $x = y$ dus

$$\sin\frac{x}{2} = \cos x \text{ waaruit } x = 60°.$$

Het is aardig om hiermede te vergelijken de functie:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\gamma;$$

zie op fig. 3 de beide onderste krommen.

Het maximum is: $2\sin\frac{\gamma}{2} + \cos\gamma$ (waarvan het maximum ook door gewone herleiding is te vinden). Men kan ook a.v. te werk gaan

$$2\sin\frac{x}{2} + \cos x = 2\sin\frac{y}{2} + \cos y$$

$$\cos x - \cos y = 2\left(\sin\frac{y}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)$$

$$-2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} = -4\sin\frac{x-y}{4}\cos\frac{x+y}{4}$$

$$2 . \cos\frac{x-y}{4}\sin\frac{x+y}{4}\cos\frac{x+y}{4} = \cos\frac{x+y}{4}$$

$$\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{y}{2} = 1 \qquad \text{voor het extreem: } x = 60°.$$

De laagste waarde wordt: $2\sin^2\frac{\gamma}{2} + \cos\gamma = 1.$

Wenst men $\triangle\, ABC$ scherphoekig dan: $\sin\gamma + \cos\gamma$ (zie fig. 3).

Vergelijkt men beide grafieken, dan ontstaat het vermoeden, dat beide functies voor een driehoek, even groot kunnen zijn. Deze driehoek moet dan stomphoekig zijn.

Een nader onderzoek leert, dat dan, aannemend dat α die stompe hoek is, $148°6' < \alpha < 150°$. Wenst men dus α een geheel aantal graden, dan is de enige oplossing (zie S op fig. 3)

$\alpha = 149°$	$\sin\alpha = 0.5150$	$\cos\alpha = -\ 0,8572$
$\beta = 25°22'$	$\sin\beta = 0,4284$	$\cos\beta = \ 0,9036$
$\gamma = 5°38'$	$\sin\gamma = 0,0982$	$\cos\gamma = \ 0,9952$
	1,0416	1,0416

M. de voorzitter, ik meen mijn tijd verbruikt te hebben. Daarom tot slot nog een enkele opmerking.

U zult vermoedelijk het woord „teleurstellingen" gemist hebben in de titel van deze lezing.

Ondervinden we niet allemaal, met een hardnekkigheid die soms terneerdrukt, teleurstellingen over de bereikte resultaten?

Wat is toch de bron, waaruit we telkens weer opnieuw de kracht

vinden, om opnieuw te beginnen, om lering te trekken uit mislukkingen?

Nu is het mijn overtuiging, dat die kracht ons toebedeeld wordt door de Goede God, die ons dit arbeidsveld toewees. Deze gave komt tot ons door onze leerlingen. Want doordat we in ons onderwijs noodzakelijk iets van onszelf uitstralen, anders is ons lesgeven dood, is het dit herkennen van onszelf in de weerklank bij onze leerlingen, dat ons, soms onbewust, de vreugden geeft, die ons alle tegenslagen zo veerkrachtig doet opvangen. Ik heb gezegd.

DIDACTISCHE REVUE

1. *Mathematica & Paedagogia*, Driemaandelijks tijdschrift, uitgegeven door de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren. 2e jaargang, No. 4.

Met belangstelling hebben we kennis genomen van dit jonge tijdschrift van onze Belgische collega's, dat blijkens de bijdragen uit diverse landen zich aanstonds op internationaal plan heeft geplaatst.

A. Monjallon, Parijs, geeft in de afdeling „*Wiskundige cultuur*" de bijdrage: „De la nature logique des mathématiques".

F. Lenger schrijft in de afdeling „*Kennis van de leerlingen*" over: „Les erreurs mathématiques des élèves", A. G. Sillitto, Glasgow, over: „Enseigner en apprenant". In de afdeling „*Onderwijs*" behandelt C. Gattegno, Londen, uitvoerig: „*Les nombres en couleurs de Georges Cuisenaire*". Ook in het verslag van de „Rencontre internationale de professeurs de mathématiques" (27 Aug. — 1 Sept. 1954, Pietersberg, Oosterbeek) is deze materie onder leiding van Gattegno door Cuisenaire besproken; de aflevering geeft een uitvoerig verslag van deze in Nederland gehouden conferentie waar zeven landen vertegenwoordigd waren.

J. L. Nicolet, Lausanne, schrijft: „*Réflexions sur l'intuition en mathematiques.*" T. J. Fletcher, Aldgate, behandelt de wiskundige film in „*Un nouveau langage mathématique*", M. Lambrechts: „*Homothetie en gelijkvormigheid*".

In de afdeling „*Contact*" schrijft Debever over: „*Le courant culturel mathématique*", L. Jeronnez, een der redacteuren over: „*Le congrès international d'Amsterdam*".

Er is een rubriek „Korrels", een rubriek „Boeken en tijdschriften", een rubriek „Vraagstukken ter oplossing".

Men kan zich voor 100 fr. per jaar abonneren bij de volgende adressen:

L. Jéronnez, 57 rue d'Hurtebise, Binche;

G. Bosteels, 283 Grote Steenweg, Berchem bij Antwerpen;

A. van Twembeke, 170 Zonnestraat, Ronse.

2. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität*, Band IV, Heft 1/2, 157 blz.; Göttingen.

Deze „Semesterberichte" nemen onder de literatuur voor de

leraar in functie een zeer eervolle plaats in. De redacteuren hebben een open oog voor de speciale beroepsopleiding van de leraar (paedagogie, didactiek, practische vorming), maar willen onder geen beding de wetenschappelijke wiskundige vorming in het gedrang laten komen.

Prof. H. Behnke zet in een inleidend artikel uiteen op welke wijze de uitgave: „Der mathematische Unterricht für die sechzehn - bis einundzwanzigjährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland" waaraan een 30 auteurs meewerkten, tot stand is gekomen. Men kan dit werk waarover op het Internationaal Mathematisch Congres 1954 te Amsterdam werd gerapporteerd, beschouwen als een vervolg op de 8 delen, die in de jaren 1908—1915 door de toenmalige Duitse onderafdeling der I.M.U.K. tot stand kwamen onder de bezielende leiding van Felix Klein.

In deze aflevering der Semesterberichte is uit de nieuwe duitse uitgave Behnke's artikel over „*die Universitäten*" overgenomen (40 blz.). De inhoud is boeiend en leerrijk, niet in het minst door de wijze waarop Behnke erin ook de evolutie van de didactiek en de methodiek in het universitaire onderwijs voor ons belicht; voor de analyse is dit de ontwikkeling van Kiepert tot Bourbaki!

H. Hermes schrijft over: „*die Universalität programmgesteuerter Rechenmaschinen*".

R. Lauffer over: „*Winkel von geraden in der orientierten euklidischen Ebene*".

H. Athen over: „*Vektorrechnung auf der Kugelfläche*".

E. Kreyszig geeft „*Ein elementarer Beweis des Satzes, dasz sich kein Teil der Kugeloberfläche längentreu in die Ebene abbilden läszt*".

De inaugurele rede van E. J. Dijksterhuis is opgenomen onder de titel: „*Ziel und Methode der Geschichte der exakten Wissenschaften*".

K. Vogel: „*Griechische Algebra in Rechenbüchern des Mittelalters.*"

H. Rau: „*Ubersicht über den Lehrstoff des mathematischen Unterrichts der Oberstufe an den höheren Schulen der Bundesrepublik*".

P. Buchner (Basel) vertelt over de geslaagde uitgave van een serie schoolboeken voor wiskunde in Zwitserland door de vereniging van wiskundeleraren, waartoe ruim 25 jaar geleden werd besloten, in zijn artikel: „*Die Mathematik-Lehrbücher des Vereins Schweizerischer Mathematiklehrer*".

In de Tagungsberichte wordt gewaagd van levendige contacten. In Oberwolfach kwamen leraren en hoogleraren onder leiding van prof. Kneser bijeen; o.m. stond de „Fortbildung" der leraren ter discussie.

Verslag wordt uitgebracht van de „Jahressammlung des Fördervereins" te München, von de „Wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik" te München, van de 20e bijeenkomst „zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und höherer Schule" te Münster i.W., en van de „Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" te Mainz.

3*a*. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*; 7. Band, 4. Heft, 15 September 1954; Bonn/Rhein, Frankfurt/M.

a. H. Gunderman bepleit philosophische propaedeuse bij het V.H.M.O. in „*Raum und Zeit* in mathematisch-physikalischer und philosophischer Schau zum 150. Todestag Immanuel Kants und zum 75. Geburtstag Albert Einsteins".

b. In het artikel van G. Kropp over „*Der Raumbegriff der exakten Wissenschaften*" lezen we o.a.: „Nach aprioristischer Auffassung konstituieren die Sätze der reinen Geometrie den Raum als Gefäsz der Körperwelt; die empiristische Ansicht macht die Beschaffenheit des Weltraums abhängig von der Verteilung der gravitierenden Massen und erklärt die Geometrie zur Erfahrungswissenschaft . . . *Kant* musz erklären wieso die ideale Gesetzlichkeit der Geometrie als einer mathematischen Disziplin in der Realität sich wiederfindet; *Einstein* hätte zu erweisen, dasz die empirisch bestimmten physikalischen Gesetze eine Geometrie konstituieren, die auch unabhängig von der Erfahrung gerechtfertigt werden kann".

c. H. Herrmann spreekt over „*Kunstgriff und Methode*" bij de sommering van rijen natuurlijke getallen. „Ein Kunstgriff wird zur Methode, wenn er sich mehrfach bei verschiedenartigen Aufgaben bewährt."

d. Opgenomen is een verslag van een rede van M. Wagenschein over: „*Konstruktive Stoffbeschränkung im physikalischen Unterricht*".

e. E. Beutel berekent log 3 door herhaalde kwadratering (Bopp'sche Verfahren) op een wijze die zich voor behandeling bij het V.H.M.O. leent.

f. W. Schock geeft: „*Verschiedene Arten der Herleitung für die Beschleunigung der Kreisbewegungen*".

3*b*. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*; 7. Band, 5. Heft, 1 November 1955; Bonn/Rhein, Frankfurt/M.

Van de 22 artikelen uit dit nummer vestigen we de aandacht op de volgende van wiskundig gehalte.

a. E. Wopperer, *Die Stellung der Mathematik im Unterrichtsganzen, ihr Rang im Bereich der Wissenschaften.* „Diese auszeichnende Eigenschaft der Mathematik, eine Tradition von Jahrtausenden mit einer überragenden Bedeutung für unser heutiges technisiertes Leben in sich zu vereinigen, stellt den Mathematiker unter einen verantwortungsvollen Auftrag, Avantgardist der Moderne zu sein und zugleich Bewahrer einer hohen Tradition und so die Problematik unserer Zeit an entscheidender Stelle zu bewältigen."

b. W. Pasquai, *Ein Beitrag zur Behandlung von geometrischen Ortsaufgaben auf der Oberstufe.* „Mit Recht legt man heute das Schwergewicht im Unterricht wieder mehr auf den mathematischen Gehalt und den geistigen Bildungswert der ausgewählten Übungsbeispiele als auf ihre routinemäszige und schablonenhafte Durchführung. Von diesem Gesichtspunkt aus werde im folgenden gezeigt, zu welchen tiefergehenden Überlegungen die Behandlung einer bestimmten Gattung von geometrischen Ortsaufgaben auf der Oberstufe Veranlassung gab".

c. E. Dintzl, *Zur Zehnteilung des Kreises.*

d. O. Botsch, *Die allgemeine Gleichung zweiten Grades.*

e. J. Mergheim, *Kleinste Zahlen, deren Teileranzahl eine Potenz von* 10 *ist.*

f. W. Schweizer, *Ein Beweis des Entwicklungssatzes der Vektorrechnung.*

g. H. Kunze en Th. Spielmann, *Zur Herleitung von Additionstheoremen.*

4*a*. *Elemente der Mathematik.* Band IX, Nr. 5, 15 September 1954, Verlag Birkhäuser, Basel.

Bij gelegenheid van de 60e verjaardag van H. Hopf wijdt H. Hadwiger aan hem een artikel: „*Kurze Herleitung der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel*".

„Es wird eine Begründung der isoperimetrischen Ungleichung

$$F^3 - 36\pi V^2 \geqq 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

für eigentliche konvexe körper des gewöhnlichen Raumes vorgetragen und gezeigt, dasz Gleichheit nur für die Kugel besteht. Gleichzeitig wird die Gültigkeit der beiden Minkowskischen Ungleichungen

$$M^2 - 4\pi F \geqq 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2a)$$
$$M^3 - 48\pi^2 V \geqq 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2b)$$

nachgewiesen. In (1) und (2) bedeuten V, F, M Volumen, Oberfläche und Integral der mittleren Krümmung".

M. Jeger schrijft: „*Zur Erzeugung ebener Figuren durch Projektion*, aan welk artikel een serie opgaven over stereografische projectie is toegevoegd.

4*b*. *Elemente der Mathematik*, Band IX, Nr. 6, 15 November 1954, Verlag Birkhäuser, Basel.

R. Sauer: „*Elementargeometrische Modelle zur Differentialgeometrie*". „Viele differentialgeometrische Eigenschaften der Flächen, insbesondere diejenigen, die sich auf die Metrik in der Flächenhaut und nicht auf die Einbettung der Flächenhaut in den Raum beziehen, lassen sich durch analoge differenzengeometrische Eigenschaften elementargeometrischer Modelle (Dreiecks- und Vierecksgitter, Streifenmodelle und dergleichen) veranschaulichen... In dem vorliegenden Aufsatz wird versucht, auf Grund der zahlreichen in der Literatur verstreuten Einzelpublikationen einen kurzen zusammenfassenden Überblick über die bemerkenswertesten anschaulichen Ergebnisse der Differenzengeometrie und der hierbei verwendeten elementargeometrischen Modelle zu geben, wobei von erläuternden Figuren ausgiebig Gebrauch gemacht wird".

A. Aigner: „*Eine Verallgemeinung des Delischen Problems*". De auteur wenst drie kuben te construeren, zo dat één dus even groot is als de beide andere samen en geeft enige eenvoudige voorbeelden.

R. Lauffer: „*Zur Behandlung von Gleichungen mit Quadratwurzeln*".

L. Locher-Ernst brengt verslag uit over het *Internationaal Mathematisch Congres* 1954 te Amsterdam.

5*a*. *The Mathematics Teacher*, Volume XLVII, number 6, October 1954; the official journal of the National Council of Teachers of Mathematics, Washington.

a. Howard F. Fehr, Columbia University, behandelt in „*The role of insight in the learning of mathematics*", aansluitend bij Max Wertheimer en Karl Duncker, enige aspecten der denkpsychologie. „Insightful learning does not come about by telling the students how te solve problems. It comes about by making use of the heuristic method, giving hints and clues, examining solutions, and approaching a problem in many ways".

b. Kenneth P. Kidd, University of Florida „points out that learning is a complicated process and goes on to analyze this process

for the classroom teacher" in het artikel *„Improving the learning of mathematics"*.

c. J. Houston Banks, Teacher College, Tennessee,verklaart in *„The function concept in secondary school mathematics"*, het functiebegrip vroeger aan de orde te stellen dan gebruikelijk is en wijst op de misverstanden, die bij leerlingen ontstaan, doordat deze de theorie van de grafiek der kwadratische functie en van de oplossing der vierkantsvergelijkingen niet goed uit elkaar houden; „the idea of a function should be developed before the introduction of equations".

d. Emil J. Berger beschrijft: *„A model for explaining how latitude may be determined by making observations on Polaris"*.

e. Edmund E. Inngalls, Albion College, publiceert in *„George Washington and mathematics education"* een brief van Washington uit 1788, naar aanleiding van Nicholas Pike's System of Arithmetics", waarin Washington van zijn positieve waardering voor de wiskunde getuigt.

f. Adrian Struyk geeft in *„Company for Pythagoras"* zeven schoolvoorbeelden van de vergelijking $a^n + b^n = c^n$, opvolgend voor $n = 2, -2, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{3}$. Voorts schrijft hij een slotartikel *„Theme paper and ruler, finale"* van een serie van vier bijdragen „which present methods of sketching the conics, using a ruler and composition paper".

g. William L. Schaaf vervolgt zijn lectuuropgaven met titels over talstelsels in *„Scales of notation"*.

h. Voorts zijn er nog enige kleinere bijdragen in de rubrieken „Tips for beginners" en „What is going on in your school".

5b. *The Mathematics Teacher*, Volume XLVII, number 7, November 1954, Washington.

a. C. B. Boyer, *„Analysis: notes on the evolution of a subject and a name"*. The author traces briefly the historical rise of one of the three main divisions of mathematics, with particular reference to changes in the use of the term „analysis". In his opinion it would be better to abandon altogether the conventional tripartite categorization into algebra, geometry, and analysis, and to return to the simple dichotomy between algebra and geometry.

b. G. R. Rising, *„A geometric approach to field-goal kicking"*. The author answers the question: When should a team take a five-yard penalty to get a better angle for kicking a field goal?

c. J. H. Zant, *„The revision of certification requirements for secondary mathematics teachers in Oklahoma"*. The minimum requirements set up by the State Board of Education consisted in

brief of three parts: (1) general education (50 semester hours); (2) professional education (21 semester hours), and (3) specialized education (24 to 30 semester hours). The author gives an account of how Oklahoma and its institutions of higher education work on the modernization of certicifation requirements.

d. H. Schor, *„A mathematics assembly program"*. The author points out that with a little showmanship many of the well-known mathematical facts and theorems can be utilized to make a high-school assembly program.

e. E. N. Boyd, *„The cultural course in mathematics for college students"*. This article contains a discussion of some of the „wider" objectives of a cultural course in mathematics. The author develops the thesis that pragmatic considerations govern the selection of postulates in a mathematical system.

f. Ph. S. Jones, *„Tangible arithmetic: Napier's and Genaille's rods"*.

g. R. W. Shoemaker, *„A note on the sequence of odd integers"*.

h. R. J. Harms, *„A geometry project at Thornton Township High School"*.

i. W. L. Schaaf gives references for mathematics teachers to the *„slide rule"*.

j. W. J. Hazard, *„A simple quadrant compasses"*.

k. C. B. Gustafson, *„A simple device for demonstrating addition and substraction in the binary numbersystem"*.

6*a*. *School Science and Mathematics*, volume LIV, number 7, whole 477, October 1954.

Van de mathematische bijdragen uit deze aflevering noemen we:

a. Ch. W. Trigg, *„Unorthodox ways to trisect a line segment"*.

b. A. P. Cornell, *„Theorems and formulas concerning fundamental right angle triangles"*.

c. J. Satterly, *„Trigonometry and the practical descriptive geometry of oblique planes"*.

d. L. G. Brandes, *„Optical illusions"*.

e. La Verne S. Powers, *„The correlation of science and mathematics in the junior high school."*

6*b*. *School Science and Mathematics*, Volume LIV, number 8, Whole 478, November 1954; Menasha.

In *„Technical mathematics for grades* 9, 10 and 11" stelt M. F. Rosskopf een beter wiskunde-program voor in verband met de hogere eisen die de maatschappij op technisch gebied stelt. Ter

vergelijking met Nederlandse toestanden nemen we hier Rosskopf's program geheel over:

Ninth Grade: Recapitulation of fundamental operations of arithmetic with whole numbers, fractions, and decimal fractions on a maturity level appropriate to ninth graders. — The linear equation. — Informal geometry, including properties of common plane and solid figures, formulas for area or surface or volume, and constructions. — Graphs and elementary statistics. — Measurement, including the elements of computation with approximate numbers. — Mathematics of the home, business, and government. — Directed numbers. — Factoring and special products, including the solution of a quadratic equation by factoring. — Ratio, proportion, and variation. — Numerical trigonometry, but no interpolation, using sine, cosine and tangent ratios. — System of two equations in two unknowns. — Exponents, including the extension of the definition of an exponent to include zero and negative exponents. — Simple radicals.

Tenth grade: Elements of deductive logic, emphasizing at appropriate points in the course such concepts as undefined terms, definitions, assumptions, what constitutes a proof, converse, inverse, contrapositive, and necessary and sufficient conditions. — Geometry of the triangle, parallel lines, the circle, angle measurement, and similar figures. — Areas. — Numerical trigonometry, including interpolation in a four-place table of trigonometric functions for the sine, cosine, and tangent ratios. — Elements of analytic geometry. — Locus. — Inequalities. — Regular polygons.

Eleventh grade: Systems of two and three equations in two and three unknowns, respectively, including solution by determinants. — Concept of a function, including functional notation, direct, and inverse variation. — Factoring and special products at a more advanced level than in the ninth or tenth grade. — Exponents. — Radicals, including the extension of an exponent to a rational number. — Complex number system. — Quadratic equations, including solution by formula, the discriminant, the sum and product of the roots, and the equation of the axis of symmetry. — Systems of quadratic equations. — Computation with approximate numbers. — Logarithms. — Trigonometric solution of right triangles using logarithms. — Definition of six trigonometric functions of a general angle. — Radians. — Properties of the trigonometric functions, including graphs and reduction formulas. — Simple trigonometric identities and equations. — Inverse trigonometric functions. — Trigonometry of the oblique triangle. — Multiple

angle formulas. — Sequences, series, and the binomial theorem.

Louis Grant Brandes schrijft over *Recreational mathematics*.

K. P. Kidd: „*How much? A mathematical playlet*".

Uit een boekbespreking door W. L. Schaaf over „*Manpower resources in mathematics*" blijkt: „The median annual professional income of the Ph. D. 'S in the survey was $ 6.200 in mid-1951, while the group without doctorates had a median income of $ 4,400 ... Mathematicians on the staffs of colleges and universities tended to have lower incomes than those in other types of employment ... Women who hold professional positions in the field of mathematics are, with rare exceptions, employed by educational institutions".

6c. *School Science and Mathematics*, Volume LIV, number 9, whole 479, December 1954; Menasha.

Dit nummer bevat de volgende artikelen over wiskunde:

a. C. W. Trigg, *Geometry of paper folding*, II; *Tetrahedral models*.

b. F. B. Wells, „*Mathematical figures*". Dit artikel bevat een aantal zeer fraaie figuren. „The figures presented here had for their inspiration the work of Boyd whose design, based on inscribed equilateral triangles, has recently appeared as a cover background on a technical publication."

c. W. Mannheimer, „*The digital computor: a challenge to mathematics teachers*".

A challenge of our understanding the instrument itself,
a challenge of guidance,
a challenge to our teaching,
a challenge of comprehending the social and cultural changes that may follow a second industrial revolution.

d. H. W. Stephens, *A mathematics club for future mathematicians*". This article is a report of a mathematics club for future mathematicians and research students in a high school. Members prepared papers on topics including the following: linear algebra and matrix theory, Demoivre's theorem, theory of sets, concept of limits, probability, mathematical analysis of infinity, infinite series. Boolean algebra, real number, transfinite number, factor and remainder problems, indefinables, sketching of algebraic curves by means of sign lines, and other selected topics in calculus.

e. M. T. Johnson, „*Science and arithmetic in the fifth grade*".

f. „*Problem department*".

7a. *Paedagogische Studien*; Een- en dertigste jaargang, negende aflevering; September 1954; J. B. Wolters, Groningen.

In dit nummer bespreekt dr J. N. van den Ende het reorganisatieplan voor zijn school, de Thorbecke-H.B.S. te s'-Gravenhage, welk plan in Maart 1953 door het bestuur der gemeente werd goedgekeurd. De auteur schrijft: „Wil men van het euvel van het zittenblijven verlost worden, dan moet men het afschaffen! Nergens is voorgeschreven, dat de leraarsvergadering de leerlingen een klas moet laten doubleren. Dit doubleren is een traditie geworden, maar ook niet meer". Om het beoogde doel te bereiken wordt het onderwijs in de eerste, tweede en derde klasse als één geheel beschouwd, evenzo dat in de vierde en vijfde klasse. Aan het eind van het derde schooljaar vindt een beslissing over de overgang plaats. Er is een solide systeem van contrôle en hulp, stevige samenwerking tussen school en ouders en voorlichting der ouders door 6 rapporten per jaar.

De percentages zittenblijvers van alle leerlingen in de afzonderlijke klassen zijn door het nieuwe systeem gereduceerd tot opvolgend 9, 6, 18, 4 en 21 % voor de 1e, 2e, 3e klassen, voor 4 A en 4 B.

7b. *Paedagogische Studiën*, Een- en dertigste jaargang, tiende aflevering, October 1954; J. B. Wolters, Groningen.

In „*Boeke en de Werkplaats*" gaat D. L. Daalder waarderend èn critisch na van welke betekenis de werkplaats en de stichter ervan geweest zijn voor de ontwikkeling van het Nederlandse onderwijs en de opvoeding die door dat onderwijs, bewust of onbewust, wordt gegeven.

Prof. dr M. J. Langeveld maakt: „*Enkele opmerkingen over opvoeding en onderwijs in de Verenigde Staten naar aanleiding van een studiereis*".

7c. *Paedagogische Studiën*, een- en dertigste jaargang, elfde aflevering, November 1954; J. B. Wolters, Groningen-Djakarta.

Dr J. G. Vogel brengt verslag uit van een tienjarig paedagogisch-didactisch experiment in zijn artikel: „*Filosofische propaedeuse aan M.V.H.O.-leerlingen*". Hij verklaart, dat het hem door dit experiment mogelijk is geworden in de met leerlingen vrijwillig onderno-

men filosofiecursussen een duidelijk antwoord te krijgen t.a.v. de volgende vragen:

(1). in hoeverre een wijsgerige propaedeuse tot het eigenlijke doel van de opvoeding kan bijdragen;

(2). in hoeverre de samenleving met een vroegtijdige filosofische inwijding gebaat is;

(3). hoe het met de filosofische rijpheid der hoogste klassen bij het M.V.H.O. staat;

(4). hoe de psychologische opzet van een wijsgerige inleiding zijn moet, om zoveel mogelijk de persoonlijkheid der leerlingen ten goede te komen.

J. E. van Praag en dr L. van Gelder geven: *„Een phaenomenologische beschouwing van de beeldende middelen in de kindertekening"*.

7d. *Paedagogische Studiën*, 31e jaargang, 12de aflevering, December 1954; J. B. Wolters, Groningen.

Dr. J. G. Vogel schrijft het slot van zijn artikel: *„Filosofische propaedeuse aan M.V.H.O.-leerlingen"*. Hij acht deze propaedeuse de meest voor de hand liggende oplossing, om de zo urgente integratie van de heterogene leerstof en de nodige centratie, die bij het B-onderwijs ontbreekt, te bewerkstelligen. De auteur is echter tegen het instellen van verplichte filosofie-uren. Nodig is o.m. een voorlopig facultatief filosofisch-didactisch colloquium bij de leraarsopleiding.

De auteur kant zich tegen de verandering van het Academisch Statuut, waardoor de abiturient van de H.B.S. verstoken zou blijven van het recht academische examens met hoofdvak wijsbegeerte af te leggen.

Dr G. Bolkestein stelt in *„De Nederlandse Schooltijden"* de vraag aan de orde, of in het Nederlandse onderwijs de verdeling en de plaatsing van de schooltijden in het schooljaar, in de schoolweek, op de schooldag alleen maar bepaald worden door een zekere traditie dan wel het resultaat zijn van een gezette overweging, waarbij het welzijn van de leerling en de efficiëntie van het gegeven onderwijs de twee voornaamste doelpunten zijn.

WANSINK